

УДК 550.830

## РОЗРАХУНОК ФОРМИ СТОВБУРА СВЕРДЛОВИНИ ТА ДЕЯКИХ ЇЇГО ДИФЕРЕНЦІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ СПЛАЙН - ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

*О.П.Петровський, В.В.Гладун<sup>1</sup>, П.М.Ченіль<sup>2</sup>, І.С.Чуприна<sup>2</sup>,  
А.П.Толкунов<sup>3</sup>, Я.М.Заворотько<sup>3</sup>, В.М.Сулятинов<sup>4</sup>, І.О.Петровська*  
76019, м. Івано-Франківськ, вул.Карпатська, 15, тел. (+380-34-22) 4-20-98  
<sup>1</sup> НАК "НАФТОГАЗ УКРАЇНИ,"

01001, м. Київ, вул. Б.Хмельницького, 6, тел. (+380-44) 461-24-87  
e-mail: [spas@ugr.viaduk.net](mailto:spas@ugr.viaduk.net)

<sup>2</sup> Державна геологічна служба України,  
01001, м. Київ, вул. Ежена Потьє, 16, (+380-44) 456-11-71

<sup>3</sup> ДГП „Укргеофізика”,  
01001, м. Київ, вул. С. Перовської, 10, (+380-44) 241-93-01 e-mail: [geofiz@t.kiev.ua](mailto:geofiz@t.kiev.ua)

<sup>4</sup> НТФ „БІПЕКС лтд.”,  
76000, м. Івано-Франківськ, вул. І.Франка, 4, тел. (+380-34-2) 50-10-41,  
e-mail: [alex@bipeks.if.ua](mailto:alex@bipeks.if.ua)

*Проведение геологоразведочных работ в сложных поверхностных и геологических условиях приводит к необходимости проводки наклоннонаправленных и горизонтальных скважин. В этой ситуации корректное определение пространственных координат ствола скважины является актуальной проблемой и сопряжено с определенными трудностями. Для повышения точности и достоверности пространственной привязки скважины, а также прогнозирования участков повышенных напряжений, предлагается при математическом описании поведения ствола скважины использовать сплайн интерполяцию полиномами четвертого порядка. Такая интерполяция позволяет не только более точно определить координаты ствола скважины, но и рассчитать и проанализировать такие дифференциальные характеристики как кривизна и кручение. Эффективность применения предлагаемого способа проиллюстрирована численными расчетами на основе обработки модельных и реальных инклинометрических данных.*

Буріння у складних поверхневих умовах (заболочена місцевість, роботи на шельфі, гірська місцевість, екологічно важкі ділянки) зумовлює необхідність відмовлятися від буріння вертикальних свердловин і перейти до буріння похило-спрямованих, а в деяких геологічних умовах і горизонтальних свердловин. У цій ситуації вирішення проблеми коректної просторової прив'язки криволінійного стовбура свердловини є актуальним завданням.

Відомо, що для визначення просторового положення стовбура свердловини виконуються інклінометричні дослідження [4], що включають виміри значень зенітного кута й азимута в послідовності точок вздовж стовбура свердловини. Розглядаючи опис стовбура свердловини як неперервну криву, з [1] випливає, що при виборі рівнянь, які описують зміну просторових координат необхідно

*Conducting exploration work in complex surface and geological conditions often results in the need for directional and horizontal drilling. In this case the correct determination of wellbore spatial coordinates becomes an important issue that is coupled with certain difficulties. For increased spatial well tie accuracy and validity, as well as the prediction of regions of increased stress, the mathematical formulation of wellbore performance through the use of a spline interpolation with 4th order polynomials is proposed. This type of interpolation lets us not only define wellbore coordinates more accurately but also to calculate and analyse such differential characteristics as curvature and torsion. The effectiveness of this method is illustrated when numerical calculations are performed on processed data from both the modelled and real deviation surveys.*

забезпечити їх існування і неперервність до третьої похідної. Вибір такого високого порядку гладкості цих кривих забезпечує не тільки точне визначення просторових координат, але й обрахунок таких важливих характеристик як просторові кривизна та скрут, у вирази для яких входять похідні третього ступеня вздовж параметра довжини стовбура свердловин.

Ця стаття присвячена розгляду одного з підходів до розв'язку задачі обрахунку просторових координат та диференційних характеристик стовбура свердловини на основі використання сплайн - інтерполяції поліномами четвертого ступеня, які забезпечують необхідну неперервність опису стовбура на інтервалах між точками спостереження, а в точках спостереження - неперервність аж до третьої похідної в припущенні точно заданих вихідних даних.



Виберемо прямокутну систему координат  $XYZ$ , де вісь  $OX$  спрямована на північ,  $OY$  - на схід, а  $OZ$  - в нижній півпростір до центра Землі (рис. 1).

З геометричних уявлень видно, що

$$\begin{cases} \Delta x = \Delta l \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) \\ \Delta y = \Delta l \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) \\ \Delta z = \Delta l \cdot \cos(\varphi), \end{cases} \quad (1)$$

де:  $\Delta l$  - довжина ланки  $\varphi$  - зенітний кут  $\psi$  - азимут.

Використовуючи граничний перехід і спрямовуючи  $\Delta l$  до 0, одержимо систему диференціальних рівнянь, яка описує просторову поведінку стовбура свердловини,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dl} = \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) \\ \frac{dy}{dl} = \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) \\ \frac{dz}{dl} = \cos(\varphi) \end{cases}$$

Тепер можна сформулювати постановку задачі. Знайти таке представлення параметрично заданих неперервних функцій  $F(l), V(l), W(l)$ , які описують поведінку стовбура свердловини в просторі. Ці функції повинні задовольняти таким умовам:

$$\begin{cases} x(l) = F(l) \\ y(l) = V(l) \\ z(l) = W(l) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \left. \frac{dx(l)}{dl} \right|_{l=l_i} = \sin(\varphi_i) \cdot \cos(\psi_i) = P_i^x \\ \left. \frac{dy(l)}{dl} \right|_{l=l_i} = \sin(\varphi_i) \cdot \sin(\psi_i) = P_i^y \\ \left. \frac{dz(l)}{dl} \right|_{l=l_i} = \cos(\varphi_i) = P_i^z \end{cases} \quad (3)$$

для всіх спостережень  $\varphi_i$  і  $\psi_i$ , де:  $x_0, y_0, z_0$  - координати гирла свердловини;  $P_i^x, P_i^y, P_i^z$  - значення похідних у точках спостереження  $i = 1 \div n$ ;  $n$  - кількість точок спостережень;  $l$  - параметр довжини стовбура свердловини.

Для розв'язання задачі (2) з умовами (3) використаємо метод сплайн-інтерполяції [2] поліномами четвертого ступеня. У вузлах сітки спостережень задані значення першої похідної -  $x'_i(l), y'_i(l), z'_i(l)$ , де  $i$  - номер точки вимірювання. Знайшовши коефіцієнти сплайну третього ступеня для похідних, можна шляхом інтегрування перейти до шуканих компонент  $x(l), y(l), z(l)$ . Розглянемо процес пошуку розв'язання задачі (2) з умови (3) для однієї з

компонент, наприклад,  $x(l)$ , інші компоненти  $y(l), z(l)$  можуть бути знайдені аналогічно.

Представимо функцію  $x'(l)$  кубічним сплайном

$$\begin{aligned} x'(l) = & \frac{m_i}{6h_i}(l_{i+1} - l)^3 + \frac{m_{i+1}}{6h_i}(l - l_i)^3 + \\ & + \frac{k_i}{h_i}(l_{i+1} - l) + \frac{k_{i+1}}{h_i}(l - l_i), \end{aligned} \quad (4)$$

де  $h_i = l_{i+1} - l_i$ ,  $m_i = x''(l_i)$ ,  $k_i$  і  $k_{i+1}$  - константи інтегрування, які визначаються з умов  $x'(l_i) = P_i^x$ ,  $x'(l_{i+1}) = P_{i+1}^x$  рівні

$$k_i = P_i^x - \frac{m_i h_i^2}{6}, \quad k_{i+1} = P_{i+1}^x - \frac{m_{i+1} h_i^2}{6}.$$

Для пошуку коефіцієнтів  $m_1, m_2, \dots, m_n$  розв'яжемо систему лінійних рівнянь  $A\bar{m} = H\bar{p}$ ,

де:  $A$  - квадратна матриця

$$A = \begin{pmatrix} \frac{h_1 + h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2 + h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1} + h_n}{3} \end{pmatrix}$$

$H$  - квадратна матриця

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h_{n-2}} & \frac{1}{h_{n-1}} & \frac{1}{h_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & \frac{1}{h_{n-1}} & \frac{1}{h_n} & \frac{1}{h_n} \end{pmatrix}$$

$\bar{m}$  - вектор шуканих коефіцієнтів  $\bar{p}$  - вектор вихідних даних (значень похідної у вузлах сітки). Для отримання рівняння функції  $x(l)$  проведемо інтегрування (4)

$$\begin{aligned} x(l) = & -\frac{m_i}{24h_i}(l_{i+1} - l)^4 + \frac{m_{i+1}}{24h_i}(l - l_i)^4 - \\ & - \frac{k_i}{2h_i}(l_{i+1} - l)^2 + \frac{k_{i+1}}{2h_i}(l - l_i)^2 + B, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $B$  - постійна інтегрування. Для пошуку  $B$  скористаємося тим, що нам відомо  $x(0)$  і обчислимо  $x(l_i)$  і  $x(l_{i+1})$ , тобто значення функції  $x(l)$  на початку і в кінці  $i$ -го інтервалу сітки кубічного сплайну четвертого порядку

$$x(l_i) = -\frac{m_i h_i^3}{24} - \frac{k_i h_i}{2} + B_i, \quad (6)$$

$$x(l_{i+1}) = \frac{m_{i+1} h_i^3}{24} + \frac{k_{i+1} h_i}{2} + B_i, \quad (7)$$



Враховуючи початкові умови  $x(0) = x_1$ , знайдемо постійну складову  $B_i$  на 1-ому інтервалі сітки сплайну

$$B_1 = x_1(l_1) + \frac{m_1 h_1^3}{24} + \frac{k_1 h_1}{2}, \quad (8)$$

Знаючи  $B_1$ , можна обчислити значення  $x_1(l_2)$

$$x_1(l_2) = \frac{m_2 h_1^3}{24} + \frac{k_2 h_1}{2} + B_1. \quad (9)$$

Враховуючи безперервність сплайну у вузлах сітки, а саме,  $x_1(l_2) = x_2(l_2)$ , можна знайти  $B_2$

$$B_2 = x_1(l_2) + \frac{m_2 h_2^3}{24} + \frac{k_2 h_2}{2}, \quad (10)$$

Продовжуючи цей процес, послідовно знаходимо значення  $B_i$  на всіх інтервалах сітки сплайну

$$B_i = x_{i-1}(l_i) + \frac{m_i h_i^3}{24} + \frac{k_i h_i}{2}. \quad (11)$$

Провішивши підстановку  $k_i = P_i^x - \frac{m_i h_i^2}{6}$ , запишемо

$$B_i = x_{i-1}(l_i) - \frac{m_i h_i^3}{24} + \frac{P_i^x h_i}{2}. \quad (12)$$

Аналогічним шляхом можуть бути знайдені коефіцієнти  $m_1, m_2, \dots, m_n$  і  $B_1, B_2, \dots, B_n$  для компонентів  $y(l)$  і  $z(l)$ .

Виведене представлення кривої, яка описує просторову поведінку стовбура свердловини у вигляді сплайну четвертого ступеня дає можливість не тільки розрахувати просторові координати, але й одержати такі диференційні характеристики кривої як кривизна та скрут.

В подальшому будемо використовувати такі позначення:  $\rho$  - кривизна,  $\tau$  - скрут. Для знаходження величин  $\rho$  і  $\tau$  скористаємось такими співвідношеннями [1]:

$$\rho^2 = x''(l)^2 + y''(l)^2 + z''(l)^2, \quad (13)$$

$$\tau = -\frac{1}{\rho^2} (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \vec{p}_3, \quad (14)$$

де  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$  - відповідно вектори першої, другої та третьої похідних параметричних функцій.

В остаточному вигляді (14) можна переписати так:

$$\begin{aligned} \tau = & -\frac{1}{\rho^2} (x'''(l)y'(l)z''(l) - x''(l)y''(l)z'(l) + \\ & + x'(l)y'''(l)z''(l) - x''(l)y'''(l)z'(l) + \\ & + x'(l)y''(l)z'''(l) - x''(l)y''(l)z'''(l)). \end{aligned} \quad (15)$$

У виразах (13) і (15) використовуються другі і треті похідні від функцій  $x(l), y(l), z(l)$ .

Для їх знаходження скористаємось виразом (5) і після диференціювання отримаємо

$$x''(l) = -\frac{m_i}{2h_i}(l_{i+1} - l)^2 + \frac{m_{i+1}}{2h_i}(l - l_i)^2 - \frac{k_i}{h_i} + \frac{k_{i+1}}{h_i}. \quad (16)$$

$$x'''(l) = \frac{m_i}{h_i}(l_{i+1} - l) + \frac{m_{i+1}}{h_i}(l - l_i). \quad (17)$$

Вищі похідні для компонент  $y(l)$  і  $z(l)$  розраховуються за аналогічними формулами.

У відповідності з визначеннями з диференційної геометрії [3] кривизною  $\rho$  просторової кривої в довільній точці називається кутова швидкість обертання вектора дотичної відносно цієї точки при обертанні в дотичній площині. Величина скруту  $\tau$  характеризує кутову швидкість обертання бінормалі\* до заданої кривої в площині, перпендикулярній до вектора дотичної. Величина скруту є позитивною, коли просторова крива нагадує правогвинтову лінію і відповідно негативною у випадку лівогвинтової.

Виходячи з властивостей цих диференційних характеристик, можна висловити такі твердження:

1 В довільній точці стовбура свердловини можна вважати локально прямолінійним тільки у тому випадку, коли величина кривизни  $\rho$  в цій точці дорівнює нулю;

2 В довільній точці стовбура свердловини можна вважати таким, що зазнає плоского згину тільки в тому випадку, коли величина скруту  $\tau$  в цій точці дорівнює нулю;

3 В довільній точці стовбура свердловини слід вважати таким, що зазнає просторового згину у випадку, коли величини кривизни  $\rho$  та скруту  $\tau$  одночасно не дорівнюють нулю. Це відповідає ситуації, коли траєкторія свердловини в заданій точці не може бути описана як плоска крива, а величина скруту характеризує величину відхилення кривої від цієї площини.

Наведені диференційні характеристики дають можливість не тільки якісно, але й кількісно оцінювати вплив просторового викривлення стовбура на труби, розташовані в свердловині. Це можна зробити, скориставшись властивістю, що обернені величини до наведених диференціальних характеристик

дають відповідно радіус кривизни -  $\frac{1}{\rho}$  та

радіус скруту -  $\frac{1}{\tau}$ . На підставі цих даних

можна розрахувати фактичну форму кожної з

\* Бінормаль - спрямована пряма, яка проходить через задану точку просторової кривої і утворює разом з позитивним напрямом дотичної і головною нормаллю правосторонню декартову систему координат.



труб і у відповідності з цим визначити величини максимальних навантажень і як наслідок аварійно небезпечних ділянок стовбура.

Слід зауважити, що при стандартній обробці результатів проводиться розрахунок такої величини, як інтенсивність набору кута, яка наближено дає інформацію про величину кривизни стовбура. Розрахований коефіцієнт кореляції між величинами  $\rho$  та інтенсивністю набору кута на фактичних даних становить 0.9 – 0.95. Що стосується скруту, то в даний час за стандартною методикою обробки ця характеристика не може бути визначена через те, що стандартні формули розрахунку описують кусочно-плоску форму стовбура. Тобто, між двома точками замірів форма стовбура описується плоскою кривою, що фактично не є вірним.

З метою ілюстрації правомірності і ефективності застосування запропонованого способу розрахунку форми стовбура свердловини з використанням сплайн-інтерполяції розглянемо результати обчислення форми і диференційних характеристик стовбура свердловин, які представлені елементом дуги кола, що є плоскою кривою з постійною кривизною і гвинтовою лінією, яка є просторовою кривою з постійною кривизною і скрутом та реальної нафтової свердловини.

В таблиці 1 наведено результати обрахунку для моделі дуги кола.

В таблиці 2 наведено результати експерименту з використанням як моделі гвинтової лінії.

Перевірка отриманих співвідношень для обробки реальних інклінометричних даних проведена для похило-спрямованої нафтової свердловини № 565 Холмогорського нафтового

Таблиця 1

Глибина (М)	Зенітний кут (Гр-Хв)	Азимут (Гр)	Абсолютні координати			Коефіцієнт кривизни	Коефіцієнт скруту
			Z (М)	X (М)	Y (М)		
0.0	0-00'	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
174.5	10-00'	0.0	173.8	15.2	0.0	1.00	0.00
349.1	20-00'	0.0	342.6	60.5	0.0	1.00	0.00
523.6	30-00'	0.0	501.0	134.3	0.0	1.00	0.00
698.1	40-00'	0.0	644.2	234.6	0.0	1.00	0.00
872.7	50-00'	0.0	767.6	357.9	0.0	1.02	0.00

Таблиця 2

Глибина (М)	Зенітний кут (Гр-Хв)	Азимут (Гр)	Абсолютні координати			Коефіцієнт кривизни	Коефіцієнт скруту
			Z (М)	X (М)	Y (М)		
0.0	63-26'	180.0	-0.0	0.0	10.0	0.0	
1.0	63-26'	185.0	0.4	-0.9	10.0	80.0	-0.05
2.0	63-26'	190.0	0.9	-1.7	9.8	80.0	-0.04
2.9	63-26'	195.0	1.3	-2.6	9.7	80.0	-0.04
3.9	63-26'	200.0	1.7	-3.4	9.4	80.0	-0.04
4.9	63-26'	205.0	2.2	-4.2	9.1	80.0	-0.04
5.9	63-26'	210.0	2.6	-5.0	8.7	80.0	-0.04
6.8	63-26'	215.0	3.1	-5.7	8.2	80.0	-0.04
7.8	63-26'	220.0	3.5	-6.4	7.7	80.0	-0.04
8.8	63-26'	225.0	3.9	-7.1	7.1	80.0	-0.04
9.8	63-26'	230.0	4.4	-7.7	6.4	80.0	-0.04
10.7	63-26'	235.0	4.8	-8.2	5.7	80.0	-0.04
11.7	63-26'	240.0	5.2	-8.7	5.0	80.0	-0.04
12.7	63-26'	245.0	5.7	-9.1	4.2	80.0	-0.04
13.7	63-26'	250.0	6.1	-9.4	3.4	80.0	-0.04
14.6	63-26'	255.0	6.5	-9.7	2.6	80.0	-0.04
15.6	63-26'	260.0	7.0	-9.8	1.7	80.0	-0.04
16.6	63-26'	265.0	7.4	-10.0	0.9	80.0	-0.04



родовища. Стандартні побудови – план і профіль свердловини, а також 3D аксонометричне зображення стовбура цієї свердловини наведено на рис.2. Розраховані криві, які характеризують ступінь кривизни і скруту стовбура свердловини подані на рис. 3. Добре видно значне викривлення стовбура при наборі кута – інтервал до 750 м та наявного не врахованого при стандартній обробці скруту в інтервалі від 0 до 1750 м. При цьому в інтервалі 400-550 м спостерігається інтенсивне збільшення скруту, майже в три рази відносно решти інтервалу свердловини. Як видно з рис. 3, розрахунок величини скруту дає не тільки інформацію про поведінку свердловини, але й можливість уникнути похибок при визначенні просторових координат. Так, на рис. 4 наведено криву похибки визначення координат стовбура свердловини при проведенні розрахунків за формулами (1) та (5)

$$\Delta = \sqrt{(x_i - x(l_i))^2 + (y_i - y(l_i))^2 + (z_i - z(l_i))^2} \quad (18)$$

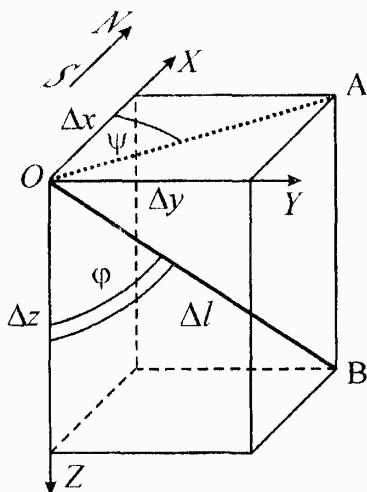
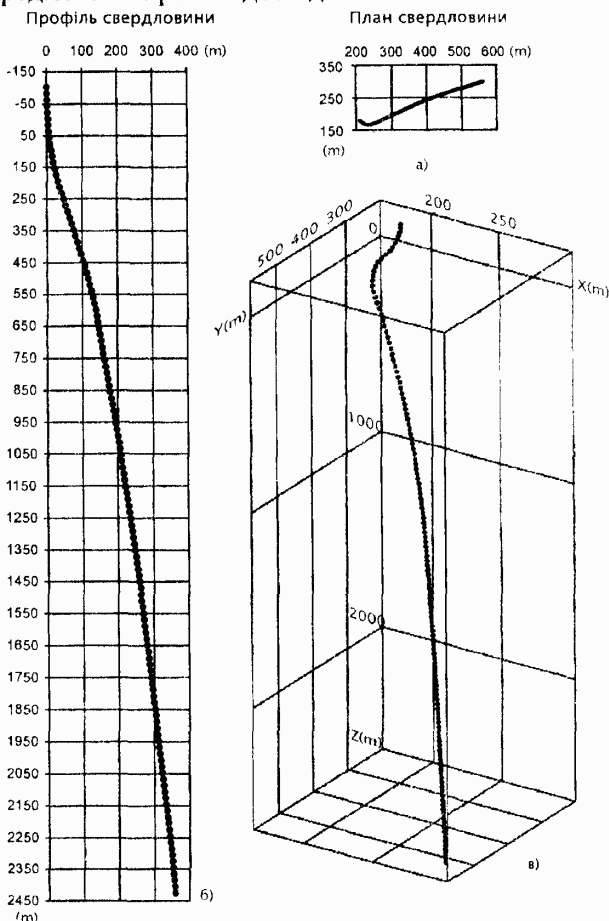


Рисунок 1 – Система позначень для виведення рівняння форми стовбура свердловини за даними інклінометрії

Наведений графік досить яскраво відображає залежність між похибкою та величиною скруту стовбура. Однак в центральній частині стовбура свердловини ми бачимо значне зменшення похибки. Але це також пов'язано з врахуванням скруту, а саме зі зміною знаку залежно від напрямку скручування стовбура – лівостороннє чи правостороннє. Якщо подивитись на план стовбура свердловини (рис. 2), то видно, що свердловина до глибини 600 м має лівосторонній скрут, а відтак він змінюється на правосторонній, і таким чином за рахунок похибки зворотного знака величина (18) зменшується майже до нуля, але потім знов збільшується і на вибій свердловини досягає 6 м. Наведена оцінка похибки обрахунку стовбура стосується виключно похибок, які виникають внаслідок

прийнятих модельних уявлень про поведінку стовбура свердловини і не враховує наявну похибку експериментального вимірювання кута і азимуту. Однак розгляд цього питання виходить за межі цієї статті і може бути предметом окремих досліджень.

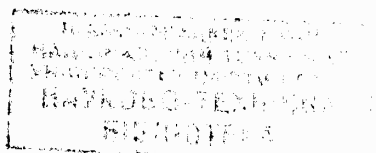


а – план свердловини; б – профіль свердловини; 3 – 3D аксонометричне зображення свердловини  
Рисунок 2 – Графічне зображення результатів розрахунку форми стовбура свердловини № 565 Холмогорського нафтового родовища (Росія)

Наведені в статті результати теоретичних досліджень і чисельних експериментів на тестових і реальних свердловинних даних підтверджують ефективність запропонованого нового способу математичного опису форми свердловини та обробки даних інклінометрії.

### Література

- 1 Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 2. – М.: Наука, 1967.
- 2 Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980.
- 3 Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1978, с. 831.
- 4 Инструкция по проведению инклінометрических исследований в скважинах. – Калинин: НИО «СОЮЗПРОМГЕОФИЗИКА», 1989, 14 с.



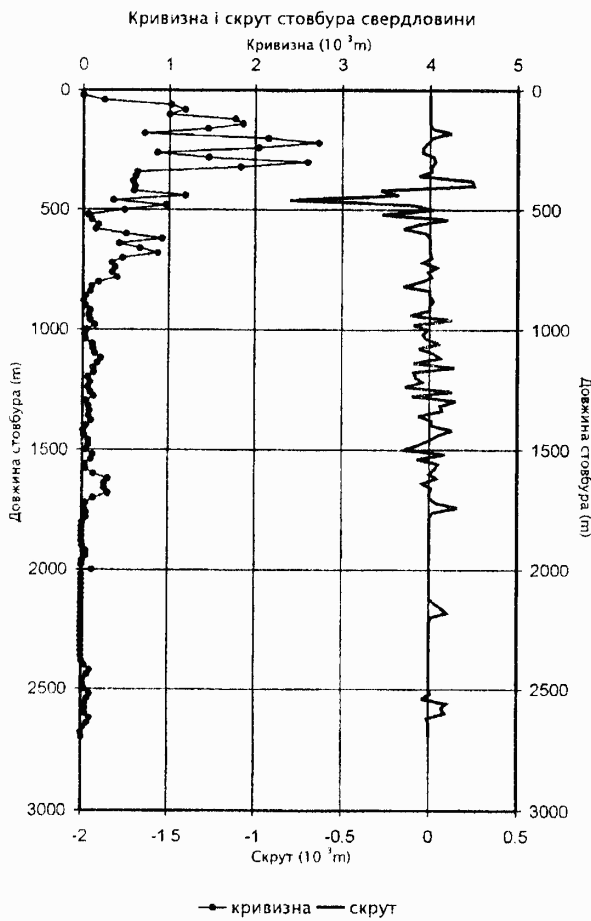


Рисунок 3 – Залежності величин кривизни та скруту від довжини стовбура свердловини по свердловині № 565 Холмогорського нафтового родовища

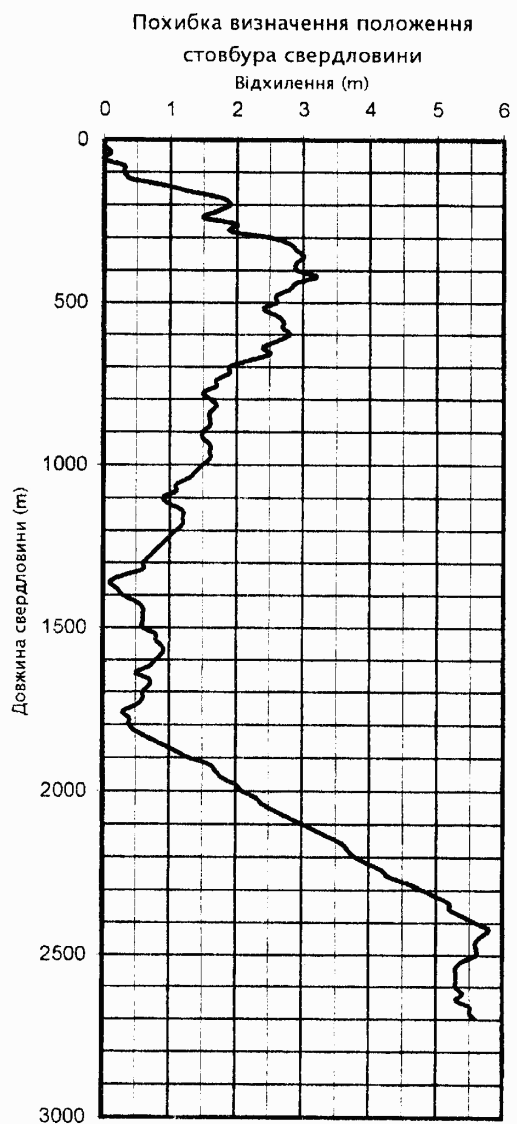


Рисунок 4 – Діаграма просторової похибки визначення координат стовбура свердловини № 565 Холмогорського нафтового родовища

