

# Дослідження та методи аналізу

---

---

УДК 622.24 + 621.694.2

DOI: 10.31471/1993-9973-2022-3(84)-24-32

## ВИКОРИСТАННЯ ВИХРОВОЇ ФУНКЦІЇ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ РОБОЧОГО ПРОЦЕСУ СВЕРДЛОВИННОГО СТРУМИННОГО НАСОСА

Д. О. Паневник

ІФНТУНГ; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (0342) 727101,  
e-mail: o.v.panevnik@gmail.com

На основі використання комплексного потенціалу вихрової функції запропоновано математичну модель робочого процесу струминного насоса для умов його симетричного обертання в свердловині. Поле лінійних швидкостей характеризується траєкторією вихрових ліній, які генеруються вихровою точкою для плоского потоку та вихоропроводом для просторової течії. Щоб охарактеризувати вихрову функцію, використано циркуляцію вектора поступальної швидкості руху рідини по замкненому контуру у вигляді подвоєного добутку швидкості потоку на площу камери змішування. У випадку плоского потоку графічне зображення вихрової функції має вигляд концентрично розміщених ліній течії та сукупності еквіпотенціальних прямих, що проходять через центр координат. Для тривимірного потоку еквіпотенціальні поверхні та поверхні течії функції вихору, як і у випадку функції витoku, утворюють гідродинамічну сітку у вигляді ортогонально розміщених коаксіальних сфер та радіальних меридіальних площин. Отримані в процесі моделювання робочого процесу струминного насоса співвідношення задовільняють умовам Коши – Римана, що дозволяє визначити абсолютне значення вектора швидкості вихрового потоку у вигляді модуля похідної характеристичної функції циркуляційного потоку. Відповідно до отриманої характеристичної функції швидкість циркуляційної течії визначається асимптотичними кривими, у випадку нульових значень координати просторового вихору швидкість циркуляційної течії дорівнює нескінченості, а зі збільшенням відстані до початку координат наближається до нуля. Максимальна швидкість циркуляційного потоку лінійно залежить від частоти обертання бурильної колони і прямопропорційна діаметру камери змішування струминного насоса.

Ключові слова: свердловинний струминний насос, ежекційна система, потенціальні потоки, гідродинамічні функції, комплексний потенціал, потенціал швидкостей, вихрова функція.

Based on the use of the complex potential of the vortex function, a mathematical model of the working process of the jet pump for the conditions of its symmetrical rotation in the well is proposed. The field of linear velocities is characterized by the trajectory of vortex lines, which are generated by a vortex point for a planar flow and a vortex conduit for a spatial flow. To characterize the vortex function, the vector circulation of the translational speed of the liquid movement along a closed circuit in the form of a double product of the flow rate by the area of the mixing chamber has been used. In the case of plane flow, the graphic representation of the vortex function has the form of concentrically placed streamlines and a set of equipotential lines passing through the coordinate center. For a three-dimensional flow, the equipotential surfaces and flow surfaces of the eddy function, as in the case of the leakage function, form a hydrodynamic mesh in the form of orthogonally placed coaxial spheres and radial meridional planes. The ratios obtained in the process of modeling the working process of the jet pump satisfy the Cauchy-Riemann conditions, which makes it possible to determine the absolute value of the velocity vector of the vortex flow in the form of the derivative of the characteristic function of the circulation flow. According to the obtained

characteristic function, the speed of the circulation current is determined by asymptotic curves; in the case of zero values of the coordinate of the spatial vortex, the speed of the circulation current is equal to infinity, and with increasing distance to the origin of the coordinates, it approaches zero. The maximum speed of the circulation flow depends linearly on the rotation frequency of the drill string. It is directly proportional to the diameter of the mixing chamber of the jet pump.

Keywords: hydraulic jet pump, ejection system, potential flows, hydrodynamic functions, complex potential, velocity potential, vortex function.

### Вступ

В умовах зростання енергоспоживання [1] та залучення в розробку родовищ вуглеводнів важковидобувних запасів нафти [2], ускладнення експлуатації нафтогазових покладів за наявності високої температури і газовмісту, винесення механічних домішок, відкладення солей та парафінів на поверхнях нафтогазопромислового обладнання, проявів значної кількості інших ускладнюючих факторів зростають вимоги до вибору технологій буріння свердловин. Одним із шляхів підвищення ефективності будівництва свердловин і, особливо, під час первинного розкриття продуктивного горизонту [3], є застосування наддолотних струминних насосів [4, 5]. Зважаючи на просту конструкцію [6], універсальність, відсутність рухомих частин [7], надійність в експлуатації та можливість застосування в автоматизованих системах управління забезпечило широке використання ежекційних систем при реалізації технологій розробки родовищ нафти і газу. Незважаючи на поширеність нафтогазових ежекційних технологій, точність прогнозування режимних параметрів експлуатації свердловинних струминних насосів є недостатньою, що пов'язано зі значною кількістю діючих факторів. Удосконалення математичних моделей робочого процесу свердловинного струминного насоса дозволяє підвищити ефективність реалізації ежекційних технологій і є актуальною задачею.

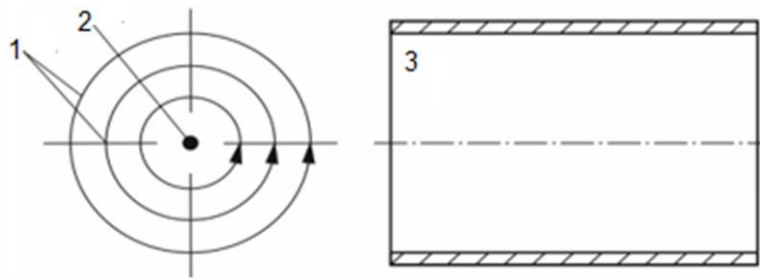
### Аналіз останніх досліджень

В процесі моделювання робочого процесу свердловинних ежекційних систем використовують вихідні дані у вигляді геометричних розмірів проточної частини струминного насоса [8, 9], конструкції свердловини [10], кінематичних та гідродинамічних параметрів робочого, ежектованого та змішаного потоків [11], реологічних властивостей робочого середовища [12]. Оптиміальне співвідношення даних параметрів дозволяє підвищити енергоефективність свердловинного струминного насоса, зменшити гідравлічні втрати при змішуванні потоків та збільшити величину коефіцієнта корисної дії ежекційної системи. Характер взаємодії змішуваних потоків у приміжевому зсувному шарі вра-

ховують за допомогою напівемпіричних теорій турбулентності [13]. Особливості робочого процесу струминного насоса визначають підвищену імовірність його експлуатації в кавітаційному режимі. При цьому виникає необхідність у введенні в математичну модель робочого процесу свердловинної ежекційної системи величин, які характеризують кавітаційні властивості робочого потоку у вихідному перерізі робочої насадки та ежектованого потоку на вході в камеру відновлення швидкостей струминного насоса [14]. У випадку використання свердловинного струминного насоса додатковим експлуатаційним фактором є величина гідростатичного тиску на ділянці встановлення ежекційної системи. Застосування в конструкції свердловинного струминного насоса пристроїв для закручування змішуваних потоків зумовлює необхідність у доповненні математичних моделей вихідними даними, які визначають кут нахилу елементів, встановлених в робочій насадці та приймальній камері ежекційної системи [15]. При використанні нафтових струминних насосів на пізній стадії експлуатації родовищ вуглеводнів додатково необхідно враховувати вміст газу в продукції свердловин [16].

### Виділення частини невирішеної проблеми

Незважаючи на значну кількість факторів, які враховуються при моделюванні робочого процесу свердловинного струминного насоса, існуючі методи розрахунку режимних параметрів ежекційної системи не враховують можливість її відносного обертання при реалізації технологічних операцій буріння та ліквідації аварій, пов'язаних із залишенням сторонніх предметів на вибої. Відносне обертання ежекційної системи в свердловині викликає появу циркуляційних течій, наслідком яких є трансформація епюр швидкостей в проточній частині струминного насоса, що має безпосередній вплив на процес змішування потоків та відновлення тиску. Існуючі сьогодні моделі змішування робочих середовищ засновані переважно на аналізі осьових проєкцій кінематичних параметрів і не можуть враховувати колові швидкості циркуляційних потоків.



1 – вихрові лінії; 2 – вихрова точка; 3 – камера змішування

Рисунок 1 – Моделювання циркуляційної течії

### Формулювання мети роботи

Метою досліджень є моделювання механізму поширення інжектваного циркуляційного потоку в проточній частині свердловинного струминного насоса із використанням елементарної гідродинамічної функції вихровиток комплексної змінної. Поставлена мета передбачає виконання наступних завдань досліджень:

- розроблення методу моделювання інжектваного потоку свердловинної ежекційної системи за допомогою тривимірної гідродинамічної функції комплексної змінної;
- аналіз параметрів, які визначають механізм поширення інжектваного циркуляційного потоку та враховуються отриманою в процесі моделювання просторовою вихровою характеристичною функцією;
- аналіз особливостей зміни швидкості циркуляційної течії відповідно до запропонованої моделі поширення інжектваного потоку.

### Висвітлення основного матеріалу

Обертальну течію потоку в проточній частині струминного насоса моделюємо за допомогою комплексного потенціалу вихрової функції (рис. 1).

Для опису поля кутових швидкостей обертання використовуємо поняття вихрових ліній, на відміну від ліній течії, що характеризують поле лінійних швидкостей. Вихрова лінія огинає вектори кутових швидкостей обертання в різних точках потоку. Сукупність вихрових ліній, проведених через різні точки потоку, визначає геометричне зображення напрямків обертання частинок рідини в потоці. Циркуляція плоского потоку ініціюється вихровою точкою, а просторового – вихропроводом. Незважаючи на колівні траєкторії струменів, течія вважається потенціальною, оскільки переміщення самих частинок рідини здійснюється поступально без обертання. Поступальний рух рідини відбувається за замкненим контуром, обмеженим внутрішньою поверхнею струминного насоса. Характеристикою вихрової функції є циркуляція

$\Gamma$  вектора поступальної швидкості руху рідини по замкненому контуру

$$\Gamma = V2\pi r, \quad (1)$$

де  $V$  – значення швидкості, вектор якої дотичний до траєкторії руху струменів;

$r$  – відстань до вихрового елемента.

Циркуляція швидкості аналогічна роботі сили, оскільки є добутком швидкості частинки на пройдений нею шлях. Потенціальність циркуляційної течії порушується в особливій точці  $r=0$ , яка містить елементарний вихор. Відповідно до теореми Стокса, якщо кутова швидкість обертання частинок рідини  $\omega$  однакова для всіх точок замкненого контуру, величина циркуляції дорівнює подвоєному добутку швидкості на площу  $S$ , яка охоплюється цим контуром

$$\Gamma = 2\omega S. \quad (2)$$

Циркуляція  $\Gamma$  є постійною для всіх ліній течії навколо вихрового елемента, який знаходиться в замкненому контурі. При моделюванні обертального руху струминного насоса вихровий елемент розміщений в об'ємі проточної частини пристрою, а границі замкненого контуру визначаються стінками камери змішування. Враховуючи взаємозв'язок між кутовою швидкістю та частотою обертання  $\omega = 2\pi n$ , циркуляцію вектора  $\Gamma$  визначаємо за формулою

$$\Gamma = 4\pi n S_K, \quad (3)$$

де  $n$  – частота обертання бурильної колони;

$S_K$  – площа нормального перерізу камери змішування.

При використанні формули (3) вважаємо, що ковзання рідини по внутрішній поверхні струминного насоса відсутнє, і кутова швидкість обертання потоку дорівнює кутовій швидкості обертання бурильної колони.

Розглянемо плоский обертаний рух частинок рідини навколо вихрової точки, розміщеної в центрі декартової системи координат.

Введемо в площині  $xOy$  полярну систему координат  $r, \theta$ . Розподіл швидкостей для вихрового поля визначаємо як циркуляцію  $\Gamma$ , розподілену по довжині контуру радіусом  $r$ , який оточує вихрову точку

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad (4)$$

де  $r$  – радіус-вектор точки в площині  $xOy$ .

Швидкість в полі плоского вихору, таким чином, зменшується з віддалення від осі вихору обернено пропорційно відстані до нього.

Формула (4) не може бути застосована до точки, яка знаходиться на осі вихору, оскільки в цьому випадку значення швидкості  $V$  зростає до нескінченності.

Швидкість циркуляційної течії  $V = V_\theta$  (рис. 2) спрямована перпендикулярно до радіус-вектора точки  $M$ , а радіальний рух потоку відсутній  $V_r = 0$ .

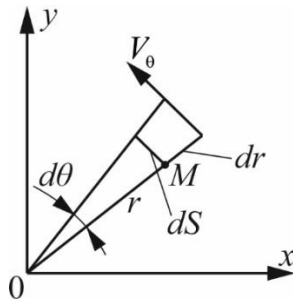


Рисунок 2 – Визначення швидкості циркуляційної течії

Тоді потенціал швидкостей не залежить від величини радіус-вектора, тож при визначенні поля швидкостей можна застосовувати звичайні похідні

$$d\varphi = V_\theta dS = \frac{\Gamma}{2\pi r} dS, \quad (5)$$

де  $dS$  – елементарна довжина траєкторії руху частинки рідини.

Після здійснення підстановки  $dS = r d\theta$  та інтегрування отримаємо

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad (6)$$

де  $\theta$  – полярний кут точки, яка знаходиться в полі вихору.

Поверхні рівного тиску визначаються рівністю

$$\frac{\Gamma}{2\pi} \theta = const, \text{ або } \theta = const \quad (7)$$

і мають вигляд променів, які проходять через вихрову точку.

Визначимо елементарну зміну функції течії  $d\psi$  плоского циркуляційного потоку як ви-

трату рідини між поверхнями концентричних циліндрів одиничної висоти, що спираються на сусідні лінії течії, відстань між якими становить  $dr$  (рис. 2). При визначенні витрати циркуляційної течії враховуємо, що функція течії приймає позитивні значення, якщо швидкість вихору спрямована за годинниковою стрілкою. Тоді для випадку, показаному на рисунку 2, використовуючи формулу (4), запишемо

$$d\psi = -V_\theta dr = -\frac{\Gamma}{2\pi r} dr. \quad (8)$$

Після інтегрування рівняння (8) отримаємо

$$\psi = -\int \frac{\Gamma}{2\pi r} dr = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (9)$$

Лінії течії, побудовані з використанням рівняння (9), мають вигляд концентричних кіл з центром у початку координат.

Визначимо вигляд рівняння комплексної функції плоского вихору. Враховуючи рівняння потенціалу швидкостей та функції течії (6), (9), запишемо

$$\begin{aligned} W(z) = \varphi + i\psi &= \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln e^{-i\theta} - \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln r = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln e^{i^2\theta} - \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln r = \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi} i \ln e^{i\theta} - \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln r = -\frac{\Gamma}{2\pi} i \ln r e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (10)$$

Під час перетворень (10) враховано поняття натурального логарифма та уявної одиниці ( $i^2 = -1$ ). Використовуючи формулу Ейлера для показової форми комплексного числа, отримаємо

$$W(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi} i \ln z. \quad (11)$$

Порівняльний аналіз структури рівнянь комплексних функцій плоскорадіальної та циркуляційної (11) течій свідчить про те, що лінії течії та екіпотенціальні лінії міняються місцями. Графічне зображення рівняння (11) має вигляд (рис. 3) концентрично розміщених ліній течії та сукупності екіпотенціальних прямих, що проходять через центр координат.

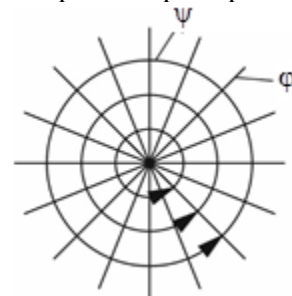


Рисунок 3 – Гідродинамічна сітка циркуляційного потоку

Визначимо вигляд рівнянь функції просторового вихору. Введемо в площині  $z, r$  циліндричної системи координат полярні координати  $R, \theta$ : вісь полярної системи координат спрямуємо вздовж осі  $z$ , а її полюс сумістимо з початком координат циліндричної системи (рис. 4).

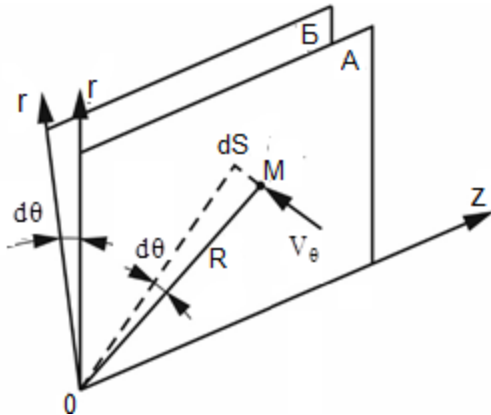


Рисунок 4 – Визначення потенціалу швидкостей просторового вихору  $V_\theta$

Покажемо в площині  $z, r$  положення радіус-вектора  $R$  точки  $M$ . Внаслідок повороту площини  $A$  навколо осі  $z$  на кут  $d\theta$  точка  $M$  описує дугу  $ds$ , яка з'єднує площину  $A$  з її новим положенням (площина  $B$ ). Еквіпотенціальні поверхні (у даному випадку – це поверхні  $A, B$ ) відзначаються незмінною величиною потенціалу швидкостей. Зміна потенціалу швидкостей відбувається при переході від однієї еквіпотенціальної поверхні до іншої по дузі, ортогональній до ліній течії. Циркуляційна швидкість  $V_\theta$  спрямована дотично до дуги лінії течії  $ds$ . При повороті точки  $M$  та площини  $A$  навколо осі  $z$  на кут  $d\theta$  отримаємо дугу довжиною  $ds = d\theta R$ . Тоді, враховуючи поняття комплексного потенціалу, запишемо формулу для визначення елементарного приросту потенціалу швидкостей

$$d\phi = V_\theta ds = V_\theta R d\theta, \quad (12)$$

де  $R$  – радіус-вектор точки в площині  $z, r$ .

Формула для визначення швидкості циркуляційної течії (4) для просторового потоку набуде вигляду

$$V = V_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi R}. \quad (13)$$

Тоді після підстановки значення швидкості  $V_\theta$  у формулу (12) та інтегрування отримаємо рівняння потенціалу швидкостей просторового вихору

$$\phi = \frac{\Gamma}{4\pi} \int d\theta = \frac{\Gamma}{4\pi} \theta = \frac{\Gamma}{4\pi} \operatorname{arctg} \frac{r}{z}. \quad (14)$$

Аналогічний вираз для визначення потенціалу швидкостей у сферичній системі координат отриманий для вихорового кільця.

Для визначення рівняння функції течії просторового вихору використовуємо циліндричну систему координат. Обертання витoku в площині, нормальній до напрямку руху рідини, розглядаємо як обертання частинок рідини навколо точки витoku в діаметральних площинах. При цьому вважаємо, що характер взаємодії радіального і циркуляційного потоків у кожній діаметральній площині є однаковим. Характер взаємодії потоків у нормальній до руху рідини площині вважаємо тотожним характеру взаємодії потоків у площині розміщення бурильної колони. Тобто фактичну поверхню течії, (яка має форму циліндра) ми замінили уявною сферичною поверхнею. Такий підхід дозволив сумістити плоскі (радіальний та циркуляційний) рухи у взаємоперпендикулярних площинах. Можливість прийняття даного припущення перевіряємо шляхом експериментальних досліджень. Розглянемо в площині  $A$  (рис. 5) криволінійний чотирикутник, сторони якого утворені поворотом кінця радіуса-вектора  $R$  на кут  $d\theta$ , та його елементарним приростом  $dR$ . Довжина дуги, утвореної поворотом радіуса-вектора на один радіан, дорівнює  $1 \times R$ . Тоді площа криволінійного чотирикутника становить  $RdR$ .

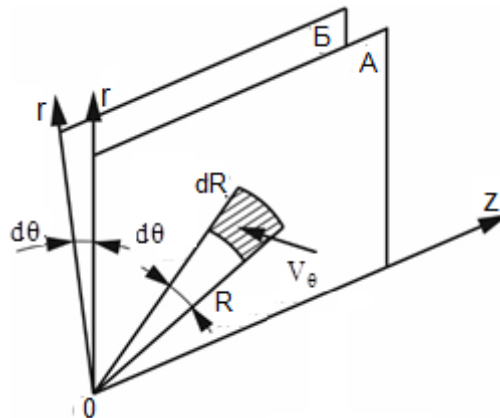


Рисунок 5 – Визначення функції течії просторового вихору

Швидкість вихору  $V_\theta$  спрямована перпендикулярно до виділеної площини. Тоді добуток елементарної площини та швидкості  $V_\theta$  визначає елементарну функцію течії просторового вихору. Враховуючи, що швидкість вихору  $V_\theta$ , як і у випадку плоскої циркуляційної течії (рис. 2) спрямована проти годинникової стрілки, елементарна функція течії матиме від'ємні значення



$$d\psi = -V_{\theta} R dR = -\frac{\Gamma}{4\pi} dr. \quad (15)$$

Після інтегрування рівняння (15) отримаємо функцію течії просторового вихору

$$\psi = -\frac{\Gamma}{4\pi} R. \quad (16)$$

Після виключення величини радіуса-вектора  $R = \sqrt{z^2 + r^2}$  остаточно запишемо

$$\psi = -\frac{\Gamma}{4\pi} \sqrt{z^2 + r^2}. \quad (17)$$

Визначимо вигляд поверхонь однакових швидкостей та поверхонь течії просторового вихору в циліндричній системі координат. Використовуючи рівняння (14), визначимо кут нахилу прямої, що проходить через центр координат

$$Q = \frac{4\pi\varphi}{\Gamma}. \quad (18)$$

Змінюючи значення функції  $\varphi$ , отримаємо сукупність прямих, які проходять через центр координат в площині  $z, r$  (рис. 6).

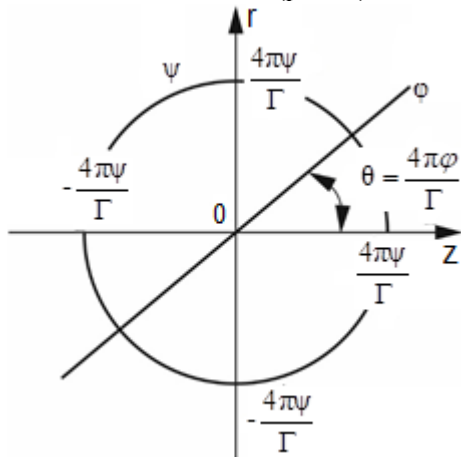


Рисунок 6 – Визначення форми гідродинамічної сітки просторового вихору

Форму поверхонь течії визначаємо, використовуючи рівняння (17). Після розв'язання рівняння (17) відносно  $r$  і підстановки значень координати  $z = 0$  отримаємо (рис. 6)

$$r_{\max} = \pm \frac{4\pi\psi}{\Gamma}. \quad (19)$$

Аналогічно визначаємо координату поверхні течії на осі  $z$ . Після підстановки в рівняння (17) значень координати  $r = 0$  отримаємо

$$z_{\max} = \pm \frac{4\pi\psi}{\Gamma}. \quad (20)$$

Отже, еквіпотенціальні поверхні та поверхні течії функції вихору (як і у випадку функції витоку) утворюють гідродинамічну сітку у вигляді ортогонально розміщених коаксіальних сфер та радіальних меридіальних площин. По-

рівняно з функцією витоку еквіпотенціальні поверхні займають місце поверхонь течії.

Враховуючи рівняння (14), (17), запишемо формулу характеристичної функції циркуляційного потоку

$$W(z) = a(\arctg \frac{r}{z} - i\sqrt{z^2 + r^2}), \quad (21)$$

де  $a = \frac{\Gamma}{4\pi}$ .

Отримані співвідношення використовуємо для дослідження кінематики циркуляційного потоку. Дослідження кінематики циркуляційного потоку вимагає попередньої перевірки дотримування умов аналітичності (умов Коши – Римана) функцією комплексного потенціалу вихорового поля. Визначимо компоненти швидкості циркуляційної течії шляхом диференціювання функції потенціалу швидкостей. Для горизонтальної компоненти циркуляційної швидкості використовуючи рівняння (14) отримаємо

$$V_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\Gamma}{4\pi} \arctg \frac{r}{z} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\partial}{\partial(r/z)} \arctg \frac{r}{z} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{1+(r/z)^2} \left(-\frac{r}{z^2}\right) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{r}{z^2+r^2}. \quad (22)$$

Аналогічно визначаємо вертикальну складову компоненти циркуляційної швидкості

$$V_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Gamma}{4\pi} \arctg \frac{r}{z} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\partial}{\partial(r/z)} \arctg \frac{r}{z} \frac{\partial r}{\partial r} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{1+(r/z)^2} \frac{1}{z} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{z+\frac{r^2}{z}} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{z}{z^2+r^2}. \quad (23)$$

Співвідношення між компонентами швидкості та функції течії циркуляційного потоку визначаємо, враховуючи структуру рівняння (15). Відповідно до рівняння (15) швидкість циркуляційної течії можна визначити за формулою

$$V_{\theta} = -\frac{1}{R} \frac{\partial\psi}{\partial r}. \quad (24)$$

Значення функцій  $\psi_1, \psi_2$  (рис. 7), враховуючи фізичний зміст даного параметра, зберігаються постійними вздовж ліній течії  $\psi_1 = const; \psi_2 = const$ , а зміна функції  $\psi$  відбувається при переході від однієї лінії течії до іншої

$$d\psi = \psi_1 - \psi_2. \quad (25)$$

Елементарний приріст функції течії  $d\psi$ , таким чином, відповідає елементарному приросту радіус-вектора  $dr$  між сусідніми лініями течії. Враховуючи, що функція течії характеризує витрату потоку, швидкість циркуляційної

течії визначається як зміна функції течії, що відповідає проєкціям елементарного приросту радіус-вектора  $dr$  на відповідні осі

$$V_z = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad (26)$$

$$V_r = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (27)$$

Сторона трикутника AC на рисунку 7 є проєкцією  $dr$  на вісь  $z$ , а сторона трикутника BC є проєкцією  $dr$  на вісь  $r$ .

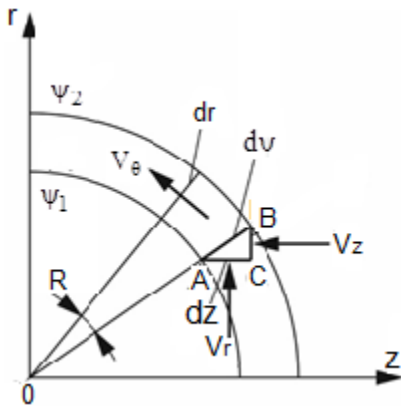


Рисунок 7 – Визначення компонентів циркуляційної швидкості

Вибір знаків перед множником  $1/R$  у формулах (24), (26), (27) пояснюється прийнятим додатним напрямом швидкості вихору у формулі (15) та співвідношенням напрямків компонентів швидкості і прийнятою системою координат (рис. 7).

Послідовність застосування формул (26), (27) враховуючи рівняння (17), має вигляд

$$V_z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{\Gamma}{4\pi} \sqrt{z^2 + r^2} \right) = -\frac{\Gamma}{4\pi R} \frac{1}{2} (z^2 + r^2)^{-0.5} 2r = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{r}{z^2 + r^2}; \quad (28)$$

$$V_r = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\Gamma}{4\pi} \sqrt{z^2 + r^2} \right) = \frac{\Gamma}{4\pi R} \frac{1}{2} (z^2 + r^2)^{-0.5} 2z = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{z}{z^2 + r^2}. \quad (29)$$

Рівність значень проєкції швидкості  $V_z$  визначеної за формулами (22), (28) та проєкції швидкості  $V_r$ , визначеної за формулами (23), (29) свідчить про виконання умов Коши – Римана. Тоді результуюча швидкість циркуляційної течії може бути визначена за формулою

$$V = \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| = \sqrt{V_z^2 + V_r^2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}}. \quad (30)$$

Проаналізуємо поле швидкостей циркуляційного потоку. Враховуючи формулу для визначення циркуляції потоку  $\Gamma$  (3), запишемо

$$V = \frac{S_\kappa n}{\sqrt{z^2 + r^2}}, \quad (31)$$

де частота обертання  $n$  визначається швидкістю обертання ротора або турбобура. Поле швидкостей циркуляційної течії, побудоване за формулою (31) для фіксованої частоти обертання, зображене на рисунку 8. Швидкість циркуляційної течії в площинах  $V_0z, V_0r$  визначається асимптотичними кривими вигляду, відповідно  $A/z, B/r$ . У випадку нульових значень координати  $z, r$  швидкість циркуляційної течії дорівнює нескінченності  $V = \infty$ . Зі збільшенням відстані до початку координат швидкість циркуляційної течії асимптотично наближається до нуля.

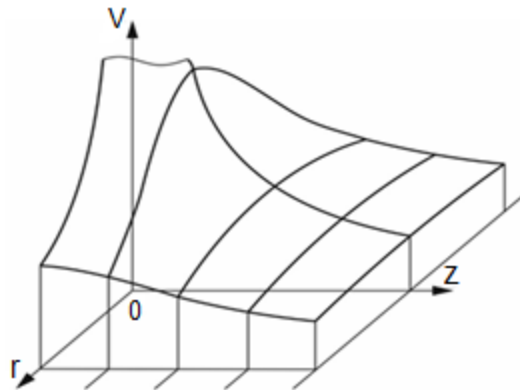


Рисунок 8 – Поле швидкостей циркуляційного потоку

Залежність максимальної швидкості циркуляційного потоку від частоти обертання бурильної колони має лінійний характер (рис. 9). Швидкість циркуляційного потоку визначена за формулою (31) для випадку  $r = 0, z = const$ .

Після перетворення рівняння (31) отримаємо

$$V_{\max} = \frac{S_\kappa n}{z} = \frac{\pi}{4} d_\kappa^2 \frac{n}{z}, \quad (32)$$

де  $z$  – параметр, що визначає відстань між центром вихору і камерою змішування струминного насоса.

Величина  $z$  у формулі (32) може змінюватись від  $z = 0$  (в особливій точці), коли швидкість циркуляційної течії зростає до безмежності  $V_{\max} = \infty$ , до  $z = d_\kappa / 2$ . Останній випадок відповідає величині циркуляційної швидкості біля стінки камери змішування струминного насоса.

Рівняння (32) визначає максимальну швидкість руху частинок рідини циркуляційного безвихрового потоку. Порівняємо швидкість циркуляційної течії, визначену за формулою (32), з лінійною обертовою швидкістю потоку

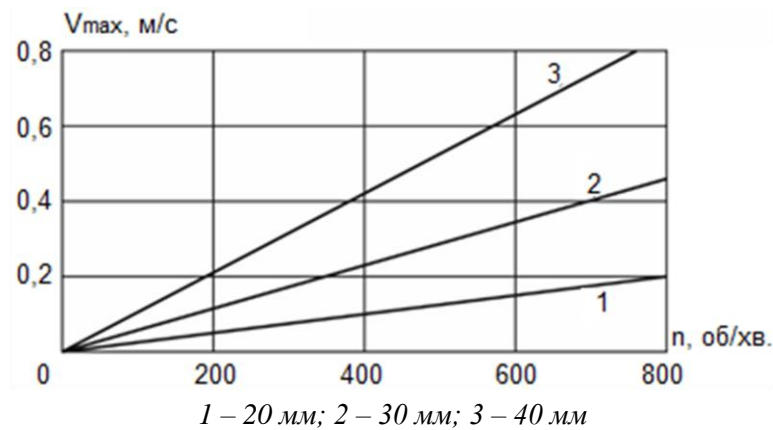


Рисунок 9 – Залежність максимальної циркуляційної швидкості від частоти обертання струминного насоса для різних діаметрів камери змішування

для випадку, коли рідина розглядається як тверде тіло і зв'язок між радіусом траєкторії руху її частинок і швидкістю є лінійним

$$V'_{\max} = \frac{\omega d_{\kappa}}{2} = \pi n d_{\kappa}, \quad (33)$$

де  $\omega$  – кутова швидкість руху частинок рідини.

Співставлення швидкостей руху рідини, визначених за формулами (32), (33), свідчить про відмінність механізмів, які визначають лінійну обертову швидкість частинок рідини та твердого тіла.

#### Висновки

1. Розроблений метод моделювання інжектованого потоку свердловинної ежекційної системи за допомогою тривимірної гідродинамічної функції комплексної змінної: робоче середовище представлено у вигляді комплексного потенціалу вихрової функції, центр якої розміщений на одній осі з камерою змішування струминного насоса.

2. Отримана в процесі моделювання просторова вихрова характеристична функція враховує координати точки, параметри якої визначаються, частоту обертання бурильної колони та площу нормального перерізу камери змішування, та дозволяє побудувати просторову гідродинамічну сітку у вигляді ортогонально розміщених коаксіальних сфер та радіальних меридіональних площин.

3. Відповідно до отриманої моделі швидкість циркуляційної течії визначається асимптотичними кривими, у випадку нульових значень координати просторового вихору швидкість циркуляційної течії дорівнює нескінченності, а зі збільшенням відстані до початку координат наближається до нуля. Максимальна швидкість циркуляційного потоку лінійно залежить від частоти обертання бурильної колони.

Завдання подальших досліджень полягає у вивченні взаємодії радіального та вихрового потоків у проточній частині струминного насоса та розробленні методики визначення характеристики ежекційної системи для умов її обертання в свердловині.

#### Література / References

1. EIA project nearly 50% increase in world energy use by 2050, led by grow thin renewables. International Energy. *Outlook 2021* (IEO2021). Weekly Report, October 7, 2021. Available at: <https://www.eia.gov/todayinenergy/detail.php?id=49876>. (accessed 07.10.2021).
2. Kryzhanivskiy Ye.I., Vytyaz O.Yu., Tyrlych V.V., Hrabovskiy R.S., Artym V.I. Evaluation of the conditions of drill pipes failure during tripping operations. *SOCAR Proceeding*. 2021. Vol. 1. P. 36-48. doi:10.5510/OGP20210100478.
3. Halim M.C., Hamidi H., Akisanya A.R. Minimizing Formation Damage in Drilling Operations: A Critical Point for Optimizing Productivity in Sandstone Reservoirs Intercalated with Clay. *Energies*. 2022. Vol. 15(1), No 162. P. 30. doi:10.3390/en15010162.
4. Kryzhanivskiy E.I., Panevnyk D.A. Improving use efficiency above-bit jet pumps. *Socar proceeding*. 2020. No 2. P. 26-34. doi:10.5510/OGP20200200437.
5. Panevnik A.V., Kontsur I.F., Panevnik D.O. Opredelenie ekspluatatsionnyih parametrov naddolotnoy ezhektornoy komponovki. *Neftyanoe hozyaystvo*. 2018. No 3. P. 70-73. [in Russian] doi:10.24887/0028-2448-2018-3-70-73.
6. Chen X., Cao T., Yu K., Gao D., Yang J., Wei H. Numerical and experimental investigation on the depressurization capacity of a new type of depressure-dominated jet mill bit. *Petroleum Science*. 2020. Vol. 17. P.1602–1615. doi:10.1007/s12182-020-00472-8.



7. Xu K., Wang G., Zhang L., Wang L., Yun F., Sun W., Wang X., Chen X. Multi-Objective Optimization of Jet Pump Based on RBF Neural Network Model. *Journal of Marine Science Engineering*. 2021. Vol. 9(2), 236, 19 p. doi:10.3390/jmse9020236.
8. Yong H., Lihong Z., Deyong Z., Hualin L., Jinying W., Jinshen Y., Yugang Z., Zhibin W. Study on structure parameters of reverse circulation drill bit secondary injector device based on injectors coefficient. *SPE/IADS Asia Pacific Drilling Technology Conference*, Singapore, 22–24 august 2016. IADS/SPE–180539–MS. 9 p.
9. Chen X., Cao T., Yu K., Gao D., Yang J., Wei H. Numerical and experimental investigation on the depressurization capacity of a new type of depressure-dominated jet mill bit. *Petroleum Science*. 2020. Vol. 17. P.1602–1615. doi:10.1007/s12182-020-00472-8.
10. Velez R.P., Vásquez-Santacruz J., Marín-Urías L., Vargas A., García-Ramírez P., Morales-de-la-Mora J., Vite-Morales A., Gutierrez-Domínguez E. Efficiency Maximization of a Jet Pump for an Hydraulic Artificial Lift System. *Scipedia*. 2019. Vol. 35, No 1. P. 12. doi:10.23967/j.rimni.2018.11.002.
11. Suryanarayana P. V., Hasan K., Hughes W.I. Technical Feasibility and Applicability of concentric jet pumping under balanced drilling. *SPE/IADS Underbalanced Technology Conference and Exhibition*, Houston, USA, 11–12 october 2004. SPE/IADS 91595. 20 p. <https://doi.org/10.2118/91595-MS>.
12. Hesham A.M.A., Mikhail S., Mohsen, A. Jet Pump Performance With Secondary Fluids Differ in Density and Viscosity From Primary Fluid. *International Petroleum Exhibition and Conference*, Abu Dhabi, November 5–8 2006. 9 p. SPE-102546-MS. doi:10.2118/102546-MS.
13. Yong H., Lihong Z., Deyong Z., Hualin L., Jinying W., Jinshen Y., Yugang Z., Zhibin W. Study on structure parameters of reverse circulation drill bit secondary injector device based on injectors coefficient. *SPE/IADS Asia Pacific Drilling Technology Conference*, Singapore, 22–24 august 2016. 9 p. IADS/SPE–180539–MS.
14. Xu S., Wang J., Cai B., Cheng H., Ji B., Zhang Z., Long X. Investigation on cavitation initiation in jet pump cavitation reactors with special emphasis on two mechanisms of cavitation initiation. *Physics of Fluids*. 2022. Vol. 34, no. 1. P. 12. doi:10.1063/5.0075099.
15. Panevnyk D.A. Simulation of a downhole jet vortex pump's working process. *Nafta-Gaz*. 2021. No 9. P. 579–586, <https://doi.org/10.18668/NG.2021.09.02>.
16. Toteff J., Asuaje M., Noguera R. New Design and Optimization of a Jet Pump to Boost Heavy Oil Production. *Computation*. 2022. Vol. 10, No 11. P. 18. doi:10.3390/computation10010011.