

СИЛИ ІНЕРЦІЇ ОЧИСНОГО ПОРШНЯ ПРИ ПРОХОДЖЕННІ НИМ ВІДКРИТОЇ ДІЛЯНКИ МАГІСТРАЛЬНОГО ГАЗОПРОВОДУ

В. Я. Грудз, Т. Ф. Тутко*, О. Я. Дубей

ІФНТУНГ; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел./факс (0342) 72-71-38,
e-mail: public@nung.edu.ua

Задача вимушених коливань відкритої ділянки газопроводу при проходженні нею очисного поршня належить до класу задач визначення вимушених коливань одновимірних пружних об'єктів при дії на них рухомого інерційного навантаження. На даний час існує два підходи до розв'язання таких задач. Перший з них передбачає інтегрування диференціального рівняння у частинних похідних, і розв'язок задачі являє собою суперпозицію власних та супровідних коливань. Другий підхід не передбачає інтегрування диференціального рівняння у частинних похідних. До нього належать методи узагальнених координат, узагальнених переміщень, а також різноманітні числові методи. Ні перший, ні другий підходи не є простими. Тому пропонується комбінований метод, де поєднуються обидві математичні моделі. Перша модель передбачає інтегрування диференціального рівняння у частинних похідних, але без врахування сил інерції очисного поршня. Друга математична модель має у своєму складі два етапи. На першому етапі при використанні інтегрування рівняння у частинних похідних отримується інтегральне рівняння, в якому невідомою функцією є сила інерції очисного поршня. На другому етапі це рівняння розв'язується наближено чисельним методом і визначається прогин осі газопроводу та згинальні моменти вздовж його відкритої ділянки. Метою даної статті є отримання інтегрального рівняння, в якому невідома функція – це сила інерції очисного поршня. Для отримання цього рівняння розв'язується неоднорідне диференціальне рівняння у частинних похідних для прогину осі газопроводу, в якому у правій його частині, крім сили ваги поршня, є і невідома функція його сили інерції. Ця задача, як і у випадку без врахування сили інерції, розв'язувалася методом Фур'є. Для цього права частина рівняння розкладалася у нескінченний ряд, який представляє собою суму добутків власних функцій вільних коливань ділянки газопроводу та невідомої функції часу. Після знаходження цієї функції знайдено функцію часу у методі Фур'є, а отже і розв'язок задачі у вигляді нескінченного ряду, доданки якого швидко зменшуються. Використовуючи розв'язок цієї задачі, отримано інтегральне рівняння, в якому невідома функція – це функція сили інерції очисного поршня.

Ключові слова: вимушені коливання відкритої ділянки газопроводу, інтегрування рівняння у частинних похідних, прогин осі газопроводу, згинальні моменти.

Задача вынужденных колебаний открытого участка газопровода при прохождении им очистного поршня принадлежит к классу задач определения вынужденных колебаний одномерных упругих объектов при действии на них подвижной инерционной нагрузки. На данный момент существуют два подхода к решению таких задач. Первый из них предусматривает интегрирование дифференциального уравнения в частных производных и решение задачи представляет собой суперпозицию собственных и сопровождающих колебаний. Вторым подходом не предусматривается интегрирование дифференциального уравнения в частных производных. К нему принадлежат методы обобщенных координат, обобщенных перемещений, а также различные числовые методы. Но ни один из вторых подходов не являются простыми. Поэтому предлагается комбинированный метод, объединяющий обе математические модели. Первая модель предусматривает интегрирование дифференциального уравнения в частных производных, но без учета сил инерции очистного поршня. Вторая математическая модель имеет в своем составе два этапа. На первом этапе при интегрировании уравнения в частных производных получается интегральное уравнение, в котором неизвестной функцией является сила инерции очистного поршня. На втором этапе это уравнение решается приближенно численным методом и определяется прогиб оси газопровода и изгибающие моменты вдоль его открытого участка. Целью данной статьи является получение интегрального уравнения, в котором неизвестная функция – это сила инерции очистного поршня. Для получения этого уравнения решается неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных для прогиба оси газопровода, в котором в правой его части, кроме силы веса поршня, имеется и неизвестная функция его силы инерции. Эта задача, как и в случае без учета силы инерции, решалась методом Фурье. Для этого правая часть уравнения раскладывалась в бесконечный ряд, который представляет собой сумму произведений собственных функций свободных колебаний участка газопровода и неизвестной функции времени. После нахождения этой функции найдена функция времени в методе Фур'е, следовательно и решение задачи в виде бесконечного ряда, слагаемые которого быстро уменьшаются. Используя решение этой задачи, получено интегральное уравнение, в котором неизвестная функция – это сила инерции очистного поршня.

Ключевые слова: вынужденные колебания открытого участка газопровода, интегрирование уравнения в частных производных, прогиб оси газопровода, изгибающие моменты.

The task of determining the forced oscillations of the gas pipeline open section during the passage of the cleaning piston through it belongs to such type of problems, which deal with determining of forced oscillations of one-dimensional elastic objects under the action of a moving inertial load. There are currently two approaches of solving such problems. The first one involves the integration of the differential equation into partial derivatives and the solution of the problem is a superposition of eigenvalues and accompanying oscillations. The second approach does not involve the integration of the differential equation in partial derivatives. It includes methods of generalized coordinates, generalized displacements, as well as various numerical methods. Neither the first nor the second method is simple. Therefore, a combined method is proposed, which consists of two mathematical models. The first model includes the integration of the differential equation in partial derivatives, but without taking into account the force of inertia of the cleaning piston. The second mathematical model consists of two stages. At the first stage, when integrating the equation in partial derivatives, an integral equation is obtained, in which the unknown function is the inertia force of the cleaning piston. At the second stage, this equation is solved approximately by a numerical method and the deflection of the gas pipeline axis and bending moments along its open section are determined. The aim of this article is to obtain an integral equation in which the unknown function is the force of inertia of the cleaning piston. To obtain this equation, inhomogeneous differential equation is solved in partial derivatives for the deflection of the axis of the gas pipeline, in which in its right part, in addition to the gravity force of the piston, there is an unknown function of its inertia force. This problem, as in the case without taking into account the force of inertia, was solved by the Fourier method. Here, the right part of the equation was decomposed into an infinite series, which is the sum of the products of the eigenfunctions of free oscillations of the pipeline section and the unknown function of time. After finding this function, the time function in the Fourier method was determined, and hence the solution of the problem in the form of an infinite series, the terms of which decrease rapidly, was obtained. Using the solution of this problem, we receive an integral equation in which the unknown function is a function of the inertia force of the cleaning piston.

Key words: forced oscillations of the open section of the gas pipeline, integration of equation in partial derivatives, deflection of the pipeline axis, the and bending moments.

Вступ. Аналіз сучасних закордонних та вітчизняних досліджень і публікацій

Задача визначення вимушених коливань у надземній ділянці газопроводу, що виникають при проходженні в ньому під тиском газу очисного поршня, відноситься до класу задач одновимірних пружних об'єктів, що знаходяться під дією рухомого інерційного навантаження. Правильний вибір математичної моделі та методу розв'язання поставленої задачі дає необхідну інформацію, використання якої забезпечить безаварійну експлуатацію газопроводу (відсутність втрат стійкості газопроводу та його міцності).

Історично перше теоретичне дослідження цієї проблеми пов'язане з науковими статтями Н.Steuding [1] і G.W.Housner [2], які започаткували новий метод двохвильового подання коливань у вигляді суперпозиції власних та супровідних коливань. Фізична інтерпретація цього методу вперше була зроблена О.Горошко [3].

Поява цього методу викликана тим, що застосування методу Фур'є, яким розв'язуються задачі вимушених коливань одновимірних пружних об'єктів при нерухомих навантаженнях, в загальному випадку є неможливою. У диференціальному операторі

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

де u – деформація пружного об'єкта;

v – швидкість руху рухомого об'єкта), величина якого пропорційна інерційному навантаженню рухомого об'єкта на нерухомий пружний об'єкт, є другим доданок, що являє собою прискорення Кориоліса рухомого масового навантаження. А це не дозволяє розділити просторову x і часову t змінні в області дійсних шуканих функцій. Тільки завдяки модифікації методу Фур'є вдалося розробити новий метод подання коливань пружних систем у вигляді суперпозиції власних і супровідних коливань.

Цьому методу присвячена значна кількість наукових праць [4-9]. У роботах [4,5] викладена методика одержання розв'язку диференціальних рівнянь у вигляді двохвильового подання, які описують динаміку деяких конструкцій з рухомих навантаженням. В статті [6] дається аналіз робіт, що присвячені механіці пружних систем з рухомих інерційним навантаженням, дослідження яких виконано методом двохвильового представлення коливань. Також обговорюється застосування і розвиток методу двохвильового подання коливань в задачах динаміки підкріплених прямокутних пластин з рухомих інерційним навантаженням. Задача про коливання балки з рухомих рівномірно розподілених інерційним навантаженням досліджується в [7]. У роботі [8] розглянуто основні механічні і відповідні їм математичні моделі деяких задач динаміки пружних систем при дії на них рухомого інерційного навантаження. Зокрема досліджується математична модель

балки Тимошенка під дією рухомого інерційного навантаження. Балка знаходиться на пружній основі та під дією стискаючої сили. Задача розв'язана методом двохвильового подання коливань. Механічні і відповідні їм математичні моделі деяких задач динаміки пружних об'єктів під дією рухомого інерційного навантаження є предметом розгляду у статті [9]. Розв'язок задач будується на основі методу двохвильового подання коливань у вигляді суперпозиції власних та супровідних коливань.

Розрахунок стержневих систем на рухоме навантаження є предметом дослідження в [10]. Стержневі системи моделюють мости. Коливання пружної шарнірно закріпленої балки під інерційним рівномірно розподіленим рухомих навантаженням вивчається у статті [11].

Далеко не всі задачі одновимірних пружних об'єктів при дії на них рухомого інерційного навантаження можуть бути розв'язані методом двохвильового подання у вигляді суперпозиції власних та супровідних коливань. Другим напрямом вивчення коливань одновимірних пружних об'єктів під дією рухомого інерційного навантаження є напрям, який не передбачає інтегрування рівнянь у частинних похідних. До цього напрямку відносяться методи узагальнення координат, узагальнених переміщень. Методом узагальнених координат користувалися Тимошенко, Schallenkampre. Цей же метод використав А.П.Філіпов при розв'язанні задачі коливань балки під дією рухомого вантажу [12]. Для знаходження узагальнених координат ним використані рівняння Лагранжа другого роду. Розв'язок справедливий для всіх відношень маси вантажу до маси балки.

Останнім часом для вивчення поперечних коливань прямолінійної ділянки трубопроводу, що виникають під час проходження діагностичного поршня, запропоновано метод узагальнених переміщень [13]. Цей метод передбачає попереднє задання власних форм коливань ділянки трубопроводу. При застосуванні коефіцієнтів амплітудних функцій як узагальнених координат існує можливість описувати коливальні процеси звичайними диференціальними рівняннями. Зокрема, у даній роботі автори вибрали 10 власних форм коливань ділянки трубопроводу, і розв'язування задачі звелось до розв'язування системи із 20 звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

За останні 2-3 роки з'явилася низка наукових статей, у яких розглядаються коливання трубопроводів і балок ускладнених конструкцій під дією рухомого навантаження. Зокрема в роботі [14] вивчаються нелінійні вільні та ви-

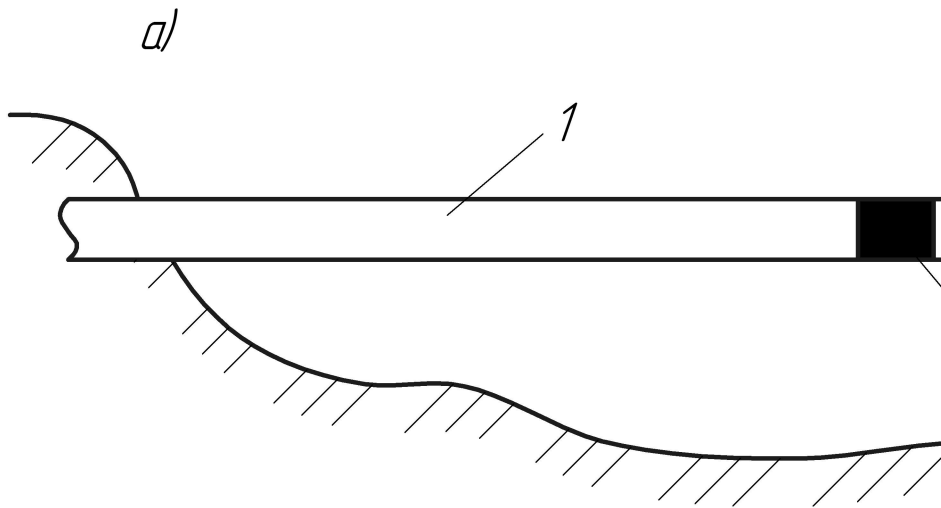
мушені коливання виготовлених з пористих функціонально градієнтних матеріалів трубопроводів, які транспортують рідини та розміщені на нелінійному пружному фундаменті. Вимушені коливання неоднорідних моделей балки, що змінюються за матеріалом і опираються на пружний фундамент, при рухомих гармонічному навантаженні досліджуються у рамках модифікованої теорії моментних напружень у статті [15]. Дослідженню вільних та вимушених коливань функціонально градуїованих пористих труб, що піддаються постійно розподіленим навантаженням, які рухаються вздовж їх напрямів з постійною швидкістю, присвячена робота [16]. Вимушені та вільні коливання балок Рейлі та Ейлера-Бернуллі, що піддаються рухомих навантаженню в осьовому напрямку, є предметом дослідження та порівняння, який приводиться в [17] з метою підвищення продуктивності транспортних систем.

Підсумовуючи все вище викладене про проблему поперечних коливань одновимірних пружних об'єктів при дії на них рухомого інерційного навантаження, відмічаємо, що існують два таких напрями вирішення вказаної проблеми:

- використання континуальних розрахункових моделей, в яких для розв'язання задачі необхідне інтегрування диференціальних рівнянь у частинних похідних;

- розв'язок задачі отримується без інтегрування рівнянь у частинних похідних, а використовуються методи узагальнених координат, узагальнених переміщень або різноманітні числові методи.

Як один, так і другий напрями не є простими. Тому було поставлено мету розроблення наближеного визначення поперечних коливань ділянки газопроводу при врахуванні як ваги очисного поршня, так і його інерційного навантаження на газопровід, який міститиме в собі елементи як одного, так і другого напрямів. У першій початковій моделі поперечні коливання газопроводу при проходженні в ньому очисного поршня розраховують без врахування інерційних навантажень на трубопровід методом інтегрування диференціального рівняння у частинних похідних. Ця модель вже реалізована у роботі [18]. Друга математична модель передбачає на першому етапі отримання рівняння, в якому невідомою функцією є сила інерції очисного поршня при його проходженні відкритою ділянкою магістрального газопроводу. На другому етапі потрібно отримати розв'язок вказаного рівняння числовим способом, визначити прогин осі газопроводу та згинальні моменти вздовж всієї відкритої ділянки газопроводу.



а) 1 – газопровід; 2 – очисний поршень;
 б) 3 – защемлена з обох кінців балка; 4 – рухомий вантаж (v – швидкість руху вантажу)
Рисунок 1 – Схема відкритої ділянки газопроводу, кінці якої защемлено

Формулювання цілей статті

Метою даної статті є отримання рівняння сил інерції очисного поршня. Розв’язок цього рівняння дасть можливість визначення вимушених коливань ділянки газопроводу з врахуванням ваги очисного поршня та його сили інерції, а також згинальних моментів по всій ділянці газопроводу.

Основна частина дослідження

Розглядається відкрита ділянка газопроводу, кінці якої защемлено. Розрахункова схема такої ділянки зображена на рисунку 1. У попередній роботі [18] вивчалися вимушені коливання такої ж ділянки газопроводу при врахуванні тільки ваги очисного поршня. Задача розв’язувалася методом Фур’є. Але прогин осі газопроводу залежить не тільки від ваги поршня, а й і від сили інерції, що виникає під час його руху. Тому диференціальне рівняння для прогину осі газопроводу у цьому випадку повинно бути таким:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{1}{\rho A} (G + P_{in}(x)) \delta(x - vt), \quad (1)$$

при цьому початкові та граничні умови мають такий вигляд:

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

де $a^2 = EI/(A\rho)$;

u - переміщення точок осі газопроводу у перпендикулярному до її початкового положення напрямі;

x, t - координата осі газопроводу і час від початку руху очисного поршня;

ρ, A, I - густина матеріалу газопроводу, площа його поперечного перерізу і осьовий момент інерції перерізу;

E - модуль пружності матеріалу труб газопроводу;

$G, P_{in}(x)$ - вага очисного поршня і його сила інерції у момент перебування у перерізі x (невідомі функції);

v - швидкість руху очисного поршня;

$\delta(x - vt)$ - дельта-функція Дірака [19];

l - довжина ділянки газопроводу.

Сформульовану задачу, як і в попередній роботі [18], будемо розв’язувати методом Фур’є, розкладаючи шуканий розв’язок в ряд за власними функціями [20]. Подамо величину $(G + P_{in}(x))\delta(x - vt)$ у вигляді ряду

$$(G + P_{in}(x))\delta(x - vt) = X_1(x)S_1(t) + X_2(x)S_2(t) + \dots \quad (4)$$

і також у вигляді ряду шукатимемо розв’язок для переміщень точок осі газопроводу (метод Фур’є)

$$u(x, t) = X_1(x)T_1(t) + X_2(x)T_2(t) + \dots \quad (5)$$

де $X_1(x), X_2(x)$ і т.д. - власні функції задачі про вільні коливання такої ж ділянки газопроводу. Вони мають такий вигляд [21]:

$$X_k(x) = K_4(\lambda_k)K_3\left(\frac{\lambda_k}{l}x\right) - K_3(\lambda_k)K_4\left(\frac{\lambda_k}{l}x\right), \quad (6)$$

$K_3\left(\frac{\lambda_k}{l}x\right), K_4\left(\frac{\lambda_k}{l}x\right)$ - функції Кривола

[22]:

$$K_3\left(\frac{\lambda_k}{l}x\right) = \frac{1}{2}\left(ch\frac{\lambda_k}{l}x - \cos\frac{\lambda_k}{l}x\right),$$

$$K_4\left(\frac{\lambda_k}{l}x\right) = \frac{1}{2}\left(sh\frac{\lambda_k}{l}x - \sin\frac{\lambda_k}{l}x\right),$$

λ_k - корені трансцендентного рівняння $ch\lambda \cos \lambda = 1$.

Для визначення функції часу $S_i(t)$ множимо обидві частини рівняння (4) на $X_i(x)$ і інтегруємо результат по всій довжині ділянки газопроводу. У зв'язку з ортогональністю власних функцій у правій частині залишиться тільки один доданок, що відповідає номеру i , так що

$$S_i(t) = \frac{\int_0^l (G + P_{in}(x))\delta(x - vt)X_i(x)dx}{\int_0^l X_i^2(x)dx}. \quad (7)$$

Базуючись на основі властивості дельта-функції і приймаючи до уваги, що знаменник в (7) має таке значення [22]

$$\int_0^l X_i^2(x)dx = \frac{l}{4}[K_4(\lambda_i)K_1(\lambda_i) - K_3(\lambda_i)K_2(\lambda_i)]^2, \quad (8)$$

отримаємо

$$S_i(t) = \frac{4(G + P_{in}(x))}{l[K_4(\lambda_i)K_1(\lambda_i) - K_3(\lambda_i)K_2(\lambda_i)]^2} \times \\ \times \left[K_4(\lambda_i)K_3\left(\frac{\lambda_i}{l}vt\right) - K_3(\lambda_i)K_4\left(\frac{\lambda_i}{l}vt\right) \right], \quad (9)$$

де $K_1(\lambda_i), K_2(\lambda_i)$ - функції Кривола:

$$K_1(\lambda_i) = \frac{1}{2}(ch\lambda_i + \cos \lambda_i),$$

$$K_2(\lambda_i) = \frac{1}{2}(sh\lambda_i + \sin \lambda_i).$$

Враховуючи те, що кожен доданок ряду (4) викликає рух, який описується відповідним доданком ряду (5), можна записати рівняння (1) у вигляді

$$X_i \ddot{T}_i + a^2 X_i^{IV} T_i = \frac{X_i S_i}{\rho A}. \quad (10)$$

Ділимо обидві частини рівняння (10) на $X_i T_i$ і отримуємо

$$-a^2 \frac{X_i^{IV}}{X_i} = \frac{\ddot{T}_i}{T_i} - \frac{S_i}{\rho A T_i}. \quad (11)$$

Ліва частина рівняння (11) дорівнює $-p_i^2$

(p_i - власна частота коливань, $p_i = \frac{\lambda_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$

[22]). Тому диференціальне рівняння для функції T_i буде таким:

$$\ddot{T}_i + p_i^2 T_i = \frac{S_i}{\rho A}. \quad (12)$$

Загальний розв'язок рівняння (12) має такий вигляд:

$$T_i(t) = \frac{1}{\rho A p_i} \int_0^t S_i(\tau) \sin p_i(t - \tau) d\tau. \quad (13)$$

Підставляємо в (13) аналітичний вираз для функції $S_i(t)$, виконуємо інтегрування і, приймаючи до уваги (5) і (6), отримуємо розв'язок задачі (1), (2), (3) у вигляді

$$u(x,t) = \frac{2}{\rho A l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_4(\lambda_i)K_3\left(\frac{\lambda_i}{l}x\right) - K_3(\lambda_i)K_4\left(\frac{\lambda_i}{l}x\right)}{p_i [K_4(\lambda_i)K_1(\lambda_i) - K_3(\lambda_i)K_2(\lambda_i)]^2} \times \\ \times \left\{ G \left[\frac{p_i K_4(\lambda_i)}{\left(\frac{\lambda_i}{l}v\right)^2 + p_i^2} \left[ch\left(\frac{\lambda_i}{l}vt\right) - \cos p_i t \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{p_i K_4(\lambda_i)}{\left(\frac{\lambda_i}{l}v\right)^2 - p_i^2} \left[\cos\left(\frac{\lambda_i}{l}vt\right) - \cos p_i t \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{K_3(\lambda_i)}{\left(\frac{\lambda_i}{l}v\right)^2 + p_i^2} \left[p_i sh\left(\frac{\lambda_i}{l}vt\right) - \frac{\lambda_i}{l}v \sin p_i t \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{K_3(\lambda_i)}{\left(\frac{\lambda_i}{l}v\right)^2 - p_i^2} \left[p_i \sin\left(\frac{\lambda_i}{l}vt\right) - \frac{\lambda_i}{l}v \sin p_i t \right] \right\} + \\ + 2 \int_0^t P_{in}(v\tau) \left[K_4(\lambda_i)K_3\left(\frac{\lambda_i}{l}x\right) - K_3(\lambda_i)K_4\left(\frac{\lambda_i}{l}x\right) \right] \times \\ \times \sin p_i(t - \tau) d\tau. \quad (14)$$

Скористатися аналітичним виразом (14) для визначення прогину осі газопроводу поки що неможливо, оскільки сила інерції $P_{in}(vt)$ очисного поршня невідома.

Прискорення очисного поршня під час його руху в газопроводі буде [12]

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\partial^2u}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2u}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2u}{\partial x^2}, \quad (15)$$

а сила його інерції

$$P_{in} = -\frac{G}{g} \left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2u}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2u}{\partial x^2} \right)_{/x=v \cdot t}, \quad (16)$$

де першим, другим та третім доданками є відповідно переносна в напрямі осі u , коріолісова і відцентрова сили інерції; g – прискорення вільного падіння.

Підставляємо (14) в (16) і отримуємо інтегральне рівняння для шуканої сили інерції очисного поршня

$$\begin{aligned} P_{in}(vt) = & -\frac{2G}{g\rho Al} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_1(\lambda_i, t)}{p_i f_2(\lambda_i)} \times \\ & \times \left\langle G \left\{ \frac{p_i K_4(\lambda_i)}{\left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 + p_i^2} \left[\left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right) + p_i^2 \cos p_i t \right] + \right. \right. \\ & + \frac{p_i K_4(\lambda_i)}{\left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 - p_i^2} \left[-\left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 \cos\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right) + p_i^2 \cos p_i t \right] - \\ & - \frac{K_3(\lambda_i)}{\left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 + p_i^2} \left[p_i \left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 \operatorname{sh}\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right) + \frac{\lambda_i}{l} v p_i^2 \sin p_i t \right] - \\ & \left. - \frac{K_3(\lambda_i)}{\left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 - p_i^2} \left[-p_i \left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right) + \frac{\lambda_i}{l} v p_i^2 \sin p_i t \right] \right\} - \\ & - 2p_i^2 \int_0^t P_{in}(v\tau) f_1(\lambda_i, \tau) \sin p_i(t-\tau) d\tau + \\ & + 2p_i P_{in}(vt) f_1(\lambda_i, t) \Bigg\rangle - \\ & - \frac{4G}{g\rho Al} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i v f_3(\lambda_i, t)}{p_i f_2(\lambda_i)} \times \\ & \times \left\langle G \left\{ \frac{p_i K_4(\lambda_i)}{\left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 + p_i^2} \left[\frac{\lambda_i}{l} v \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right) + p_i \sin p_i t \right] + \right. \right. \\ & + \frac{p_i K_4(\lambda_i)}{\left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 - p_i^2} \left[-\frac{\lambda_i}{l} v \sin\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right) + p_i \sin p_i t \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{K_3(\lambda_i)}{\left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 + p_i^2} \left[p_i \left(\frac{\lambda_i}{l} v\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right) - \frac{\lambda_i}{l} v p_i \cos p_i t \right] - \\ & - \frac{K_3(\lambda_i)}{\left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 - p_i^2} \left[p_i \left(\frac{\lambda_i}{l} v\right) \cos\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right) - \frac{\lambda_i}{l} v p_i \cos p_i t \right] \Bigg\} + \\ & + 2p_i \int_0^t P_{in}(v\tau) f_1(\lambda_i, \tau) \cos p_i(t-\tau) d\tau \Bigg\rangle - \\ & - \frac{2G}{g\rho Al} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 f_4(\lambda_i, t)}{p_i f_2(\lambda_i)} \times \\ & \times \left\langle G \left\{ \frac{p_i K_4(\lambda_i)}{\left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 + p_i^2} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right) - \cos p_i t \right] + \right. \right. \\ & + \frac{p_i K_4(\lambda_i)}{\left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 - p_i^2} \left[\cos\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right) - \cos p_i t \right] - \\ & - \frac{K_3(\lambda_i)}{\left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 + p_i^2} \left[p_i \operatorname{sh}\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right) - \frac{\lambda_i}{l} v \sin p_i t \right] - \\ & \left. - \frac{K_3(\lambda_i)}{\left(\frac{\lambda_i v}{l}\right)^2 - p_i^2} \left[p_i \sin\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right) - \frac{\lambda_i}{l} v \sin p_i t \right] \right\} + \\ & + 2 \int_0^t P_{in}(v\tau) f_1(\lambda_i, \tau) \sin p_i(t-\tau) d\tau \Bigg\rangle, \quad (17) \end{aligned}$$

де

$$f_1(\lambda_i, t) = K_4(\lambda_i) K_3\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right) - K_3(\lambda_i) K_4\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right),$$

$$f_2(\lambda_i) = [K_4(\lambda_i) K_1(\lambda_i) - K_3(\lambda_i) K_2(\lambda_i)]^2,$$

$$f_3(\lambda_i, t) = K_4(\lambda_i) K_2\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right) - K_3(\lambda_i) K_3\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right),$$

$$f_4(\lambda_i, t) = K_4(\lambda_i) K_1\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right) - K_3(\lambda_i) K_2\left(\frac{\lambda_i}{l} vt\right).$$

Інтегральне рівняння (17) є досить складним, так що мала ймовірність отримання аналітичного розв'язку цього рівняння. Це рівняння потрібно розв'язувати наближено числовим методом.

Можна вказати на приблизний характер зміни сумарної сили інерції вздовж відкритої

ділянки газопроводу. Зігнута вісь ділянки газопроводу у випадку защемлення її кінців виглядає так, що на початку та в кінці ділянки зігнута вісь розміщена опуклістю вгору, а у середній частині розміщення зігнутої осі протилежне, тобто випуклістю вниз, що видно із графіків зміни прогину, які приведені в роботах [13,18]. При цьому радіуси кривини зігнутої осі на початку і у кінці ділянки є у більшості випадків меншими ніж у середній частині. Це означає, що на початку та у кінці ділянки відцентрова сила інерції є більшою за модулем ніж у середній частині ділянки і спрямована угору. Коріолісова сила інерції на початку та у кінці ділянки газопроводу також матиме висхідний напрям (напрямок коріолісового прискорення визначається поворотом вектора швидкості v очисного поршня на 90° у напрямі його обертання). Відцентрова та коріолісова сили інерції на вгнутій частині зігнутої осі газопроводу напрямлені вниз, тобто збільшуватимуть прогин осі газопроводу.

Величина переносної сили інерції залежить від крутизни кривої зігнутої осі газопроводу. Зі збільшенням крутизни кривої величина цієї сили зростатиме. На початку дільниці на опуклій її частині, вочевидь, величина цієї сили буде незначною. При переході на увігнуту частину кривої зігнутої осі газопроводу ця сила збільшуватиметься. І далі з наближенням до точки екстремуму функції кривої зігнутої осі газопроводу величина цієї сили прямує до нуля. Від початку дільниці і до точки екстремуму функції кривої вказана сила інерції напрямлена вверх, тобто зменшуватиме прогин осі газопроводу. За точкою екстремуму функції кривої зігнутої осі переносна сила інерції буде збільшувати прогин осі газопроводу спочатку незначно, а далі при збільшенні крутизни кривої зігнутої осі збільшення буде суттєвим і при наближенні до кінця ділянки прямує до нуля.

Враховуючи все вище сказане, можна прогнозувати, що на початку дільниці газопроводу матимемо значне збільшення сумарної сили інерції, яка напрямлена проти сили ваги, тобто зменшуватиме прогин осі газопроводу. При подальшому переміщенні очисного поршня величина цієї сили буде зменшуватися. Приблизно за серединою дільниці знак сумарної сили інерції зміниться на протилежний, тобто ця сила збільшуватиме прогин осі газопроводу. Вказане збільшення сили інерції, очевидно, буде продовжуватись до початку опуклої частини зігнутої осі газопроводу. Після цього під впливом відцентрової та коріолісової сил інерції виникне різке зменшення сумарної сили інерції до нуля у кінці ділянки газопроводу.

Висновки

Наукова новизна даної роботи полягає у визначенні прогину відкритої ділянки газопроводу як функції ваги очисного поршня та його невідомої сили інерції. Це дало можливість отримати інтегральне рівняння, в якому невідомою функцією є сила інерції очисного поршня.

Перспектива подальшого дослідження полягає в одержанні розв'язку вказаного інтегрального рівняння, визначенні прогину осі відкритої ділянки магістрального газопроводу та згинальних моментів вздовж всієї його ділянки.

Література

1. Steuding H. Schwingung von Trager bei bewegten Lasten. *Ingenieur Archiv*. 1934. P. 275-305.
2. Housner G.W. Bending Vibrations of a Pipe line Containing Flowing Fluid. *Journal of Applied Mechanics*. Trans ASME. 1952. Vol. 19, Iss. 2. P. 205-209.
3. Горошко О.А. Собственные и сопровождающие колебания в системе с подвижными инерционными нагрузками. *Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям*. Киев, 1970. С. 215-219.
4. Горошко О.А., Демьяненко А.Г. О двухволновом представлении решения дифференциальных уравнений, описывающих динамику некоторых конструкций с подвижной нагрузкой. *Украинский математический журнал*. 1974. Т. 26.8.5. С. 648-651.
5. Евстратенко Д., Демьяненко А. Исследование динамики одномерных упругих объектов на основе уточненной модели. *Theoretical Foundation of Civil Engineering*. Warsaw, 2009. Vol. 17. P. 63-68.
6. Демьяненко А.Г., Евстратенко Д.А. Метод двухволнового представления колебаний и его развитие в задачах строительной механики упругих конструкций с подвижной инерционной нагрузкой. *Вісник ПДБА*. 2010. № 6. С. 43-50.
7. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.
8. Дем'яненко А.Г. Механічні і математичні моделі деяких задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням та їх дослідження. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2014. № 2(74). С. 12-22.
9. Дем'яненко А.Г. Деякі особливості і аналогії математичних моделей задач динаміки пружних об'єктів з рухомим інерційним навантаженням. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2017. № 3(86). С. 5-9.

10. Иванченко И.И. Метод расчета на подвижную нагрузку стержневых систем, моделирующих мосты. *Изв. АН РФ. Механика твердого тела*. 2001. № 4. С. 151-165.

11. Szczesniak W., Zbiciak A. Колебания упругой шарнирно закрепленной балки с одной степенью свободы под инерционной равномерно распределенной подвижной нагрузкой. *Сб. работ российско-польского семинара "Теоретические основы строительства"* (Москва–Иваново). Warszawa: Wyd. Politechn. Warszawski, 2001. P. 173-200.

12. Філіпов А.П. Коливання балки під дією рухомого вантажу. *Прикладна механіка*. 1955. Т. 1. Вип. 3. С. 268-275.

13. Теслюк В.М., Харченко Л.Є. Математичне моделювання згинних коливань прямолинійної ділянки трубопроводу під дією рухомого діагностичного поршня. *Моделювання та інформаційні технології*. 2013. Т. 69. С. 126-135.

14. Bo Zhu, Qi Xu, Ming Li, Yinghui Li Nonlinear free and forced vibrations of porous functionally graded pipes conveying fluid and resting on nonlinear elastic foundation. *Composite Structures*. 2020. Volume 252. P. 1-15.

15. Sundaramoorthy Rajasekaran, Hossein Bakhshi Khaniki. Size-dependent forced vibration of non-uniform bi-directional functionally graded beams embedded in variable elastic environment carrying a moving harmonic mass. *Applied Mathematical Modelling*. 2019. Volume 72. P. 129-154.

16. Yuewu Wang, Ke Xie, Tairan Fu. Vibration analysis of functionally graded porous shear deformable tubes excited by moving distributed loads. *Acta Astronautica*. 2018. Volume 151. P. 603-613.

17. Ali Ebrahimi-Mamaghania, Hoda Sarparast, Masoud Rezaei. On the vibrations of axially graded Rayleigh beams under a moving load. *Applied Mathematical Modelling*. 2020. Volume 84. P. 554-570.

18. Грудз В.Я., Тутко Т.Ф., Дубей О.Я. Вимушені коливання відкритої ділянки магістрального газопроводу при проходженні нею очисного поршня. *Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ*. 2020. № 2(75). С. 7-15.

19. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.

20. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение, 1976. 320 с.

21. Грудз В.Я., Тутко Т.Ф., Пиріг Т.Ю. Вільні коливання надземної ділянки магістрального газопроводу після проходження по ній очисного чи діагностичного поршня. *Розвідка і*

розробка нафтових і газових родовищ. 2019. № 3(72). С.69-75.

22. Филиппов А.П. Колебания механических систем. Киев: Наукова думка, 1965. 716 с.

Reference

1. Steuding H. Schwingung von Trager bei bewegten Lasten. *Ingenieur Archiv*. 1934. P. 275-305.

2. Housner G. W. Bending Vibrations of a Pipe line Containing Flowing Fluid. *Journal of Applied Mechanics*. Trans ASME. 1952. Vol 19. No 2. P. 205-209.

3. Goroshko O. A. Sobstvennyie i soprovozhdayuschie kolebaniya v sisteme s podvizhnyimi inertsionnyimi nagruzkami. *Trudy V Mezhdunarodnoy konferentsii po nelineynym kolebaniyam*. Kiev, 1970. P. 215-219. [in Russian]

4. Goroshko O. A., Demyanenko A. G. O dvuhvolnovom predstavlenii resheniya differentsialnykh uravneniy, opisyivayuschih dinamiku nekotorykh konstruksiy s podvizhnoy nagruzkoy. *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal*. 1974, Vol. 26.8.5. P. 648-651. [in Russian]

5. Evstratenko D., Demyanenko A. Issledovanie dinamiki odnomernykh uprugih ob'ektov na osnove utochnennoy modeli. *Theoretical Foundation of Civil Engineering*. Warsaw, 2009. Vol.17. P. 63-68. [in Russian]

6. Demyanenko A. G., Evstratenko D. A. Metod dvuhvolnovogo predstavleniya kolebaniy i ego razvitie v zadachah stroitelnoy mehaniki uprugih konstruksiy s podvizhnoy inertsionnoy nagruzkoy. *Visnik PDBA*. 2010. No 6. P. 43-50. [in Russian]

7. Panovko Ya. G., Gubanova I. I. Ustoychivost i kolebaniya uprugih sistem. М.: Nauka, 1987. 352 p. [in Russian]

8. Demianenko A. H. Mekhanichni i matematychni modeli deiakykh zadach dynamiky pruzhnykh system z rukhomym inertsiiynym navantazhenniam ta yikh doslidzhennia. *Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh*. 2014. No 2(74). P. 12-22. [in Ukrainian]

9. Demianenko A. H. Deiaki osoblyvosti i analohii matematychnykh modelei zadach dynamiky pruzhnykh obiektiv z rukhomym inertsiiynym navantazhenniam. *Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh*. 2017. No 3(86). P. 5-9. [in Ukrainian]

10. Ivanchenko I. I. Metod rascheta na podvizhnuyu nagruzkuy sterzhnevyykh sistem, modeliruyuschih mosty. *Izv. AN RF. Mehanika tverdogo tela*. 2001. No 4. P.151-165. [in Russian]

11. Szczesniak W., Zbiciak A. Kolebaniya uprugoy sharnirno zakreplennoy balki s odnoy ste-

penyu svobodyi pod inertsionnoy ravnomerno raspredelennoy podvizhnoy nagruzkoy. Rossiyskopol'skiy seminar "Teoreticheskie osnovyi stroitel'stva". (g. Moskva – Ivanovo, 2001) Wyd. Politechn. Warszawskiy, 2001. P.173-200. [in Russian]

12. Filipov A. P. Kolyvannia balky pid diieiu rukhomoho vantazhu. *Prykladna mekhanika*. 1955. Vol.1, Iss. 3. P. 268-275. [in Ukrainian]

13. Tesliuk V. M. Kharchenko L. Ye. Matematychno modeliuvannia zghynnykh kolyvan priamoliniinoi dilianky truboprovodu pid diieiu rukhomoho diahnostychnoho porshnia. *Modeliuvannia ta informatsiini tekhnologii*. 2013. Vol.69. P.126-135. [in Ukrainian]

14. Bo Zhu, Qi Xu, Ming Li, Yinghui Li Nonlinear free and forced vibrations of porous functionally graded pipes conveying fluid and resting on nonlinear elastic foundation. *Composite Structures*. 2020. Volume 252. P. 1-15.

15. Sundaramoorthy Rajasekaran, Hossein Bakhshi Khaniki. Size-dependent forced vibration of non-uniform bi-directional functionally graded beams embedded in variable elastic environment carrying a moving harmonic mass. *Applied Mathematical Modelling*. 2019. Volume 72. P. 129-154.

16. Yuewu Wang, Ke Xie, Tairan Fu. Vibration analysis of functionally graded porous shear deformable tubes excited by moving distributed loads. *Acta Astronautica*. 2018. Volume 151. P. 603-613.

17. Ali Ebrahimi-Mamaghania, Hoda Sarparast, Masoud Rezaei. On the vibrations of axially graded Rayleigh beams under a moving load. *Applied Mathematical Modelling*. 2020. Volume 84. P. 554-570.

18. Hrudz V. Ya., Tutko T. F., Dubei O. Ya. Vymusheni kolyvannia vidkrytoi dilianky mahistralnoho hazoprovodu pry prokhodzhenni neiu ochysnoho porshnia. *Rozvidka i rozrobka naftovykh i hazovykh rodovyshch*. 2020. No 2(75). P. 7-15. [in Ukrainian]

19. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. M.: Nauka, 1970. 720 p. [in Russian]

20. Panovko Ya. G. Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara. L.: Mashinostroenie, 1976. 320 p. [in Russian]

21. Hrudz V. Ya. Tutko T. F., Pyrih T. Yu. Vilni kolyvannia nadzemnoi dilianky mahistralnoho hazoprovodu pislia prokhodzhennia po nii ochysnoho chy diahnostychnoho porshnia. *Rozvidka i rozrobka naftovykh i hazovykh rodovyshch*. 2019. No 3(72). P. 69-75. [in Ukrainian]

22. Hrudz V. Ya. Tutko T. F., Pyrih T. Yu. Vilni kolyvannia nadzemnoi dilianky mahistralnoho hazoprovodu pislia prokhodzhennia po nii ochysnoho chy diahnostychnoho porshnia. *Rozvidka i rozrobka naftovykh i hazovykh rodovyshch*. 2019. No 3(72). P. 69-75. [in Russian]