де ψ — неспадна функція на $[-\pi, \pi]$, (a_n) така, що $\sum_n (1 - |a_n|) < \infty$,

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a_n}(a_n - z)}{|a_n|(1 - z\overline{a_n})}.$$

— добуток Бляшке.

Для борелевої множини $M \subset \overline{\mathbb{D}}$ такої, що $M \cap \partial\mathbb{D}$ вимірна за Лебегом на $\partial\mathbb{D}$, *повна міра* $\lambda_{\ln|F|}$ *функції* $\ln|F|$ *в сенсі Гришина* визначається рівністю

$$\lambda_{\ln|F|}(M) = \sum_{a_n \in M} (1 - |a_n|) + \psi^*(M \cap \partial\mathbb{D}).$$

де ψ^* — міра Стілтьєса, асоційована з ψ. Нехай для $p \geqslant 1$

$$m_p(r, \ln|F|) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\ln|F(re^{i\theta})||^p \, d\theta\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < r < 1.$$

У випадку $1 \leqslant p < \infty$ критерій обмеженості $m_p(r, \ln|B|)$ встановлено Я.В. Микитюком і Я.В.Васильківим 2000 року.

Нехай $C(\varphi, \delta) = \{\zeta \in \overline{\mathbb{D}} : |\zeta| \geqslant 1 - \delta, |\arg\zeta - \varphi| \leqslant \pi\delta\}$.

Теорема 1. *Нехай $f \in H^\infty$, $\gamma \in (0, 2)$, $p \in (1, \infty)$. Для того, щоб*

$$m_p(r, \log|F|) = O((1 - r)^{\gamma - 1}), \quad r \uparrow 1$$

необхідно і достатньо, щою

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \lambda_{\ln|F|}^p(C(\varphi, \delta)) \, d\varphi\right)^{\frac{1}{p}} = O(\delta^\gamma), \quad 0 < \delta < 1.$$

ОПЕРАТОРНЕ ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ЗЛІЧЕННОГО НАБОРУ НЕКОМУТУЮЧИХ ОПЕРАТОРІВ НАД СИМЕТРИЧНИМ ПРОСТОРОМ ФОКА

Шарин Сергій

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

sharyn.sergii@gmail.com

Для зліченного набору генераторів сильно неперервних груп операторів, заданих на гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, ми будуємо операторне числення, що задане на симетричному просторі Фока $\Gamma(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{H}^{\circledS n}$.

Нехай $\mathcal{G}_\beta$ — простір ультрадиференційовних функцій з компактними носіями, $E_\beta := F[\mathcal{G}_\beta]$ — простір цілих функцій експоненціального типу, що є образом при перетворенні Фур'є простору $\mathcal{G}_\beta$ (див. [1, 2]).

Визначимо простори $\Gamma(E_\beta) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} E_\beta^{\hat{\otimes}n}$ та $\Gamma(\mathcal{G}_\beta) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{G}_\beta^{\hat{\otimes}n}$ елементи яких мають вигляд $\widehat{\boldsymbol{p}} = (\widehat{p}_n)$ та $\boldsymbol{p} = (p_n)$ відповідно, де $\widehat{p}_n \in E_\beta^{\hat{\otimes}n}$ – поліноміальне перетворення Фур'є деякого $p_n \in \mathcal{G}_\beta^{\hat{\otimes}n}$ (див. [2]).

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ елемент $\widehat{p}_n$ є функцією n комплексних змінних. Якщо $p_n = \varphi^{\otimes n} \in \mathcal{G}_\beta^{\hat{\otimes}n}$ для деякої функції $\varphi \in \mathcal{G}_\beta$, то функція $\widehat{p}_n$ матиме вигляд

$$\mathbb{C}^n \ni (z_1,\ldots,z_n) \longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-it_1z_1}\varphi(t_1)\,dt_1\cdot\ldots\cdot\int_{\mathbb{R}} e^{-it_nz_n}\varphi(t_n)\,dt_n \in \mathbb{C}.$$

Тому елементи простору $\Gamma(E_\beta)$ можна розуміти як функції нескінченної кількості змінних

$$\widehat{\boldsymbol{p}} : \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C} \ni (z_1,\ldots,z_n,\ldots) \quad\longmapsto\quad \widehat{\boldsymbol{p}}(z_1,\ldots,z_n,\ldots) \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

де $\widehat{\boldsymbol{p}}(z_1,\ldots,z_n,\ldots) := \widehat{p}_0 + \widehat{p}_1(z_1) + \widehat{p}_2(z_2,z_3) + \cdots + \widehat{p}_n(z_{\mathfrak{b}_n},\ldots,z_{\mathfrak{e}_n}) + \ldots$, $\mathfrak{b}_n := \frac{n(n-1)}{2} + 1$, $\mathfrak{e}_n := \frac{n(n+1)}{2}$.

Нехай $\mathcal{H}$ — комплексний гільбертів простір. Задамо зліченний набір

$$(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \ldots), \tag{2}$$

генераторів сильно неперервних груп стиску, що діють в просторі $\mathcal{H}$.

Позначимо $\mathscr{A}_j := \underbrace{I_{\mathcal{H}}\otimes\cdots\otimes I_{\mathcal{H}}}_{j}\otimes\mathbf{A}_j\otimes I_{\mathcal{H}}\otimes\cdots \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{H}))$, $j\in\mathbb{N}$. Для кожного $n\in\mathbb{N}$ позначимо $A_n := \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}\otimes\cdots\otimes\mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}$. За означенням приймемо $\mathscr{A}_0 := I_{\mathcal{H}}\otimes I_{\mathcal{H}}\otimes\cdots \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{H}))$, $A_0 := \mathscr{A}_0$.

Тепер замість набору (2), взагалі кажучи, не комутуючих операторів, що діють в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, розглянемо зліченний набір комутуючих операторів, що діють в просторі Фока $\Gamma(\mathcal{H})$, а саме

$$A := (A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots), \tag{3}$$

де кожен оператор A_n, який визначений на всьому просторі Фока $\Gamma(\mathcal{H})$, не діє як одиничний оператор тільки на просторі $\mathcal{H}^{\hat{\otimes}n}$, тому, не обмежуючи загальності можна вважати, що $A_n \in \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\hat{\otimes}n})$, $n\in\mathbb{Z}_+$.

Нехай $\mathscr{G}$ позначає множину, елементами якої є зліченні системи операторів вигляду (3), а $\mathscr{G}_n$ — множину, елементами якої є оператори вигляду $A_n = \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}\otimes\cdots\otimes\mathscr{A}_{\mathfrak{e}_n}$, $n\in\mathbb{N}$. Приймемо за означенням $\mathscr{G}_0 := \{\mathscr{A}_0\}$.

Визначимо множину $\widetilde{\mathcal{H}}_n := \{\widetilde{p}_n : \mathscr{G}_n \longrightarrow \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}) : p_n \in \mathcal{G}_\beta^{\hat{\otimes} n}\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, що складається із функцій операторного аргумента вигляду

$$\widetilde{p}_n(A_n) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}t_1 \mathscr{A}_{\mathfrak{b}_n}} \otimes \cdots \otimes e^{-\mathrm{i}t_n \mathscr{A}_{\mathfrak{c}_n}} p_n(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n,$$

де інтеграли ми розуміємо у сенсі Бохнера. Приймемо за означенням $\widetilde{p}_0 : \mathscr{G}_0 \ni A_0 \longmapsto \widetilde{p}_0(A_0) := p_0 I_{\mathbb{C}} \in \mathscr{L}(\mathbb{C})$.

Теорема. *Відображення*

$$\mathcal{F} : \Gamma(\mathcal{G}_\beta) \ni \boldsymbol{p} = (p_n) \quad \longmapsto \quad \widetilde{\boldsymbol{p}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n \in \widetilde{\mathcal{H}}, \qquad \text{де} \quad \widetilde{\mathcal{H}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \widetilde{\mathcal{H}}_n,$$

діє як гомоморфізм з алгебри $\Gamma(\mathcal{G}_\beta)$ в алгебру $\widetilde{\mathcal{H}}$ функцій операторного аргумента, визначених на $\mathscr{G}$ із значеннями в просторі операторів на просторі Фока.

Відмітимо, що поліноміальне перетворення Фур'є $F^{\otimes} : \Gamma(\mathcal{G}_\beta) \longrightarrow \Gamma(E_\beta)$ також є гомоморфізмом. Тому відображення $\mathcal{F} \circ (F^{\otimes})^{-1} : \Gamma(E_\beta) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$ ми можемо розуміти як "елементарне" функціональне числення. Іншими словами, оператор $\widetilde{\boldsymbol{p}}(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \widetilde{p}_n(A_n) \in \mathscr{L}(\Gamma(\mathcal{H}))$ ми трактуємо як "значення" функції $\widehat{\boldsymbol{p}}$ нескінченної кількості змінних (див. (1)) на зліченному наборі $A = (A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots) \in \mathscr{G}$ операторів (див. (3)).

Література

[1] *Grasela K.* Ultraincreasing distributions of exponential type // Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica, 2003, **41**, 245–253.

[2] *Sharyn S.* Joint functional calculus in algebra of polynomial tempered distributions // Methods of Functional Analysis and Topology, 2016, **22** (1), 62–73.

НЕТЕРОВА ІМПУЛЬСНА ЗАДАЧА З КЕРУВАННЯМ

Шегда Любов

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

e-mail: l.shegda@mail.ru

В доповіді розглядається імпульсна задача

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) + A_1(t)u, \tag{1}$$