ЗАДАЧА З БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Тимків Іван

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

tymkiv_if@ukr.net

В області $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T, x \in Q \subset \mathbb{R}^p\}$, де Q — обмежена однозв'язна область з досить гладкою межею ∂Q, для параболічного за Петровським рівняння

$$W\left(\frac{\partial}{\partial t}, L\right) u \equiv \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{b(n-r)} A_r^s (-L)^s \frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r} = 0, \qquad (1)$$

розглянемо задачу з такими умовами

$$\sum_{r=0}^{N_j} a_r^j(L) \frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}\Big|_{t=t_j} = \varphi_j(x), \quad 0 \leqslant N_j \leqslant n-1, \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \qquad (2)$$

$$L^m u(t,x)\Big|_{\partial G} = 0, \quad m \in \{0,1,\ldots,(bn-1)\}, \qquad (3)$$

де $L := -\sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + q(x)$, $p_{ij}(x) > 0$, $p_{ij} = p_{ji}$, $q(x) \geqslant 0$, $A_r^s \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{N}$, $a_r^j(L) = \sum_{i=0}^{M} a_{r,i}^j L^i$, $a_{r,i}^j \in \mathbb{C}$, $M \in \mathbb{N}$, $a_{N_j,M}^j \neq 0$, $j \in \{1,\ldots,n\}$. $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant T$. Відзначимо, що багатоточкові умови (2) є узагальненням багатоточкових умов з роботи [1].

Нехай $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$, — додатні власні значення задачі $LX + \lambda X = 0$, $X|_{\partial G} = 0$, яким відповідає повна ортонормована система власних функцій $\{X_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$. Вважаємо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ корені $\mu_1(k),\ldots,\mu_n(k)$ рівняння $W(\mu,\lambda_k) = 0$ є різними і задовольняють оцінки $\mathrm{Re}\mu_l(k) \leqslant -\delta_1\lambda_k^b$, $l \in \{1,\ldots,n\}$, $\delta_1 > 0$. Позначимо: $\delta_2 = \sup\{|\mathrm{Re}\mu_l(k)|/\lambda_k^b : k \in \mathbb{N}, l = 1,\ldots,nm\}$;

$$\Delta(k) = \prod_{1\leqslant j<q\leqslant n} \frac{1}{\mu_q(k)-\mu_j(k)} \det\left\| \sum_{r=0}^{N_j} a_r^j(\lambda_k)\mu_q^r(k)\exp(\mu_q(k)t_j)\right\|_{j,q=1}^{n}, \ k \in \mathbb{N},$$

$E_{\alpha,\beta}^b$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{N}$, — простір функцій $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x)$ зі скінченною нормою $\|\varphi; E_{\alpha,\beta}^b\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^2 \lambda_k^{2\alpha}\exp(2\beta\lambda_k^b)}$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1) — (3) *у шкалі просторів* $C^n([0,T]; E^b_{\alpha,\beta})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *необхідно й досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \Delta(k) \neq 0 \tag{4}$$

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (4) *та існують сталі* $\omega, \nu \in \mathbb{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) натуральних* k *виконується нерівність*

$$|\Delta_4(k)| > \lambda_k^{-\omega} \exp(-\nu\lambda_k^b). \tag{5}$$

Якщо $f \in C\left([0,T]; E^b_{\alpha_1,\beta_1}\right)$, $\varphi_j \in E_{\alpha_2,\beta_2}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *де* $\alpha_1 = \alpha + \omega + N_0 + nb$, $\alpha_2 = \alpha + \omega + nb + N_0 - M - b\max\limits_{j=\overline{1,n}}\{N_j\}$, $\beta_1 = \beta + \nu + (T - nt_1)\delta$, $\beta_2 = \beta + \nu - (n-1)\delta t_1$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1) — (3) *з простору* $C^n\left([0,T]; E^b_{\alpha,\beta}\right)$, *який неперервно залежить від функцій* f *та* φ_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Вплив параболічності рівняння (1) проявляється в тому, що зі зростанням часу t підвищується гладкість розв'язку $u(t,x)$ багатоточкової задачі у порівнянні з гладкістю функцій f та φ_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$, за просторовими змінними $(x_1,\ldots,x_p)$. На підставі метричного підходу [1] встановлено таке твердження про можливість виконання оцінки (5).

Теорема 3. *Для довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння* (1) *та умов* (2) *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $(t_1,\ldots,t_n) \in [0,T]^n$ *нерівність* (5) *виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) натуральних* k, *якщо* $\omega > \omega_0$, $\nu \geqslant n\delta_2 T$, *де* $\omega_0 = n(n-1)(p/2 + b)/2 - ((N_1 + \ldots + N_n)b + n(M-1))$.

Отримані результати поширено у роботі [2] на параболічні системи вигляду (1) із загальними багатоточковими умовами вигляду (2). Встановлено розв'язність таких задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених з коефіцієнтів системи, коефіцієнтів багатоточкових умов та значень вузлів інтерполяції.

Література

[1] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[2] *Симотюк М. М., Тимків І.Р.* Задача з багатоточковими умовами для системи параболічних рівняннь високого порядку зі змінними коефіцієнтами // Прикарпатський вісник НТШ. Сер. Число. – 2015. – №1 (29). – С. 45–59.