Теорема. *Рівняння* (1) *інваріантне відносно конформної алгебри* $AC(1,2)$ *з базисними генераторами*

$$AC(1,2) = \langle \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x^\mu \partial_\nu - x^\nu \partial_\mu + m^{\mu\nu}(u)\partial_u, \quad D = x_\gamma \partial_\gamma, \\ K_\mu = 2x^\mu D - x^2 \partial_\mu + 2x_\nu m^{\mu\nu} \partial_u \rangle, \tag{3}$$

де $m^{\mu\nu} = m^{\mu\nu}(u)$ *задаються формулами* $m^{\nu\mu}(u) = -m^{\mu\nu}(u)$, $m^{01} = \sinh u$, $m^{02} = 1$, $m^{12} = \cosh u$, *тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд* $u = (\lambda\sqrt{u^2} + \dot{\alpha}u)\frac{u^2}{\alpha u}$, *де* λ *— довільна стала,* $u^2 = u_\mu u^\mu$, $\alpha u \equiv \alpha_\mu u^\mu = \cosh u \cdot u_0 - u_1 + \sinh u \cdot u_2$, $\dot{\alpha} u \equiv \dot{\alpha}_\mu u^\mu = \sinh u \cdot u_0 + \cosh u \cdot u_2$.

Література

[1] Блажко Л. М. Інваріантність квазілінійного рівняння другого порядку відносно конформної алгебри // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2001. — Т. 36. — С. 40–44.

[2] Блажко Л. М. Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних рівнянь гіперболічного типу: дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.03 / — К., 2008. — 138 с.

[3] Сєров М.І.,Блажко Л. М. Конформна інваріантність квазілінійних диференціальних рівняяь з частинними похідними другого порядку // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. – Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2012. — Вип. 23, № 1. — С. 26.

[4] Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.— 622с.

[5] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. — Киев: Наукова думка. — 1983. — 199 с.

[6] Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. — New York : Academic Press, 1982. — 400 p.

[7] Fushchych W., Shtelen W., Serov N. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers. — 1993. — 436 p.

[8] Rideau G. and Winternitz P. Nonlinear equations invariant under Poincare, similitude and conformal groups in two-dimensional space-time, J. Math. Phys., 1990. — V.31 — P. 1095–1105.

СИМЕТРІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ДЕЯКІ ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОГО ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ-КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Сєров Микола, Приставка Юлія

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

mserov4@gmail.com, YuliaPrystavka@rambler.ru

Математичні моделі багатьох фізичних процесів найчастіше описуються за допомогою диференціальних рівнянь з частинними похідними та їх систем. До таких рівнянь відносять двовимірне рівняння реакції-конвекції-дифузії. Воно використовується для моделювання переносу енергії в плазмі, розподілу розчинів у ґрунті, руху рідин в пористому середовищі, процесів хемотаксису та інших фізичних та біохімічних процесів. Поставимо задачу дослідити симетрійні властивості та побудувати точні розв'язки нелінійного двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії

$$\Delta u = u^k u_0 + \lambda_a u_a - \frac{1}{4}\vec{\lambda}^2 u \tag{1}$$

де $u = u(x_0, x_1, x_2)$, – часова змінна, – просторові змінні, індекс біля функції внизу означає диференціювання за відповідною змінною, за індексами, які повторюються, розуміється сумування, . Використавши заміну

$$\frac{16}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0 \to x_0, \frac{k}{4}\vec{\lambda}\vec{x} \to x_1, \frac{k}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x} \to x_2, u \to u,$$

де $\vec{\lambda}^{\perp} = (-\lambda_2, \lambda_1)$ – вектор, перпендикулярний до вектора $\vec{\lambda}$, перейдемо до рівняння

$$\Delta u = u^k u_0 + \frac{4}{k}u_1 - \frac{4}{k^2}u \tag{2}$$

Теорема 1. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння* (2) *є наступна алгебра*

$$A =< \partial_0,\ \partial_1,\ \partial_2,\ D = kx_0\partial_0 + u\partial_u,\ Q_1,\ Q_2 >,$$

де $Q_1 = e^{x_1}(\cos x_2\partial_1 - \sin x_2\partial_1 + \frac{2}{k}\cos x_2 u\partial_u)$, $Q_2 = e^{x_1}(\sin x_2\partial_1 + \cos x_2\partial_1 + \frac{2}{k}\sin x_2 u\partial_u)$.

Теорема доводиться стандартним методом Лі (див. [1], [2]). Проведемо редукцію рівняння (2) до звичайного диференціального рівняння, використовуючи вигляд оператора інваріантності

$$X = d_0\partial_0 + d_a\partial_a + c_0 D + c_1 Q_1 + c_2 Q_2. \tag{3}$$

Один з анзаців (див., наприклад [3]), отриманий за допомогою оператора (3) має вигляд

$$u = e^{\frac{2}{k}x_1}\varphi(x_0, \omega), \omega = \dot{z}(x_2)e^{x_1} + me^{2x_1},$$

де $z = z(x_2)$ — розв'язок рівняння $\ddot{z} + z = 0$. Він редукує систему (2) до диференціального рівняння

$$\varphi^k\varphi_0 = (4m\omega + \vec{c}^2)\varphi_{\omega\omega} + 4m\varphi_\omega.$$

Припустивши, що $m = 0$ прийдемо до рівняння

$$\frac{1}{\vec{A}^2}\varphi^k\varphi_0 = \varphi_{\omega\omega}. \tag{4}$$

Знайшовши плоскохвильовий розв'язок рівняння (4) та врахувавши відповідний анзац, знаходимо наступний розв'язок рівняння (1)

$$u = \left[\frac{ka}{\vec{c}^2(k+1)}(\dot{z} + me^{x_1} - ax_0e^{-x_1})\right]^{-\frac{1}{k}}$$

Література

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[2] Олвер П. приложения груп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 581с.

[3] Фущич В.И., Штепель В.М., Серов Н.И. Симметрнйний анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. – К.: Наук. думка, 1989. – 339 с.

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ОДНОРІДНОГО ЗА ПОРЯДКОМ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

[1]Симотюк Михайло, [2]Волянська Ірина

[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України,
[2]Національний університет "Львівська політехніка"

[1]quaternion@ukr.net, [2]i.volyanska@i.ua

Нехай H_α, $\alpha > 1$, простір Соболєва, який складається з таких функцій $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$, для яких $(1+\xi^2)^{\alpha/2}\tilde{\varphi}(\xi) \in L_2(\mathbb{R})$, де $\tilde{\varphi}(\xi)$ — перетворення Фур'є функції $\varphi(x)$; норма в H_α визначається рівністю

$$\|\varphi(x); H_\alpha\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 \left(1+\xi^2\right)^\alpha d\xi\right)^{1/2}.$$

Розглядаємо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_1\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} + a_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (t,x) \in (0;T)\times\mathbb{R}, \tag{1}$$