Література

[1] Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко А.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. – Киев: Наукова думка, 1976. – 272 с.

[2] Телевизионный курс сопротивления материалов. Растяжение и кручения. Учеб. пособие для вузов. Под ред. В.И. Федосеева. – М.: Высшая школа, 1977.

[3] Арутюнян Н.Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. – М.: Физматиз, 1963. – 686 с.

[4] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

[5] Сеничак В.М., Хомченко А.Н. Программа решения уравнения Пуассона в произвольной области методом ускоренных статистических испытаний // Фонд алгоритмов и программ ИПС АН Украины. – Киев, июнь 1993. – Инв. № П6412.

НЕЛОКАЛЬНІ АНЗАЦИ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ, ЩО ЛІНЕАРИЗУЄТЬСЯ

[1]Сєров Микола, [2]Омелян Олександр

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

[1]mserov4@gmail.com, [2]aomelyan@ukr.net

Системи рівнянь конвекції-дифузії мають важливі застосування для моделювання очищення забрудненої рідини при проходженні через багатошарові фільтри (див. наприклад [6],[7]), для моделювання забруднення навколишнього середовища (див. [1]), тощо. Одним з методів знаходження точних розв'язків систем рівнянь цього класу є метод С. Лі (див. [2], [7], [11]). Водночас кількість розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП), які вдається знайти за цим методом, обмежена кількістю операторів їх ліївських симетрій. Одним із напрямів одержання додаткових неліївських розв'язків рівнянь математичої фізики є застосування нелокальних симетрій, що запропоновано зокрема в роботах [4-6], [10], [12].

В нашій роботі об'єктом досліджень є системи конвекції-дифузії вигляду:

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x + G(U)], \qquad (1)$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$, $g^a = g^a(U)$ – довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1,2}$.

Нами встановлено, що ланцюжок нелокальних перетворень:

$$t = t, \quad x = x, \quad u^a = v^a_x, \qquad (2)$$

де $v^a = v^a(t,x)$ – нові невідомі функції.

$$t = x_0, \quad x = w^1, \quad v^1 = x_1, \quad v^2 = w^2, \tag{3}$$

де x_0, x_1 – нові незалежні змінні, $w^a = w^a(x_0, x_1)$ – нові залежні змінні,

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w_1^1 = z^1, \quad w_1^2 = z^2, \tag{4}$$

де $z^a = z^a(x_0, x_1)$ – нові залежні змінні, зводить систему (1) до системи того ж класу:

$$Z_0 = \partial_1[\Phi(Z)Z_1 + \Psi(Z)], \tag{5}$$

де $Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$, $\quad Z_\mu = \frac{\partial Z}{\partial x_\mu}$, $\quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\quad \Phi(Z) = \begin{pmatrix} \varphi^{11} & \varphi^{12} \\ \varphi^{21} & \varphi^{22} \end{pmatrix}$,

$$\Psi(Z) = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \varphi^{ab} = \varphi^{ab}(Z), \psi^a = \psi^a(Z), \quad \mu = 0,1,$$

причому функції $f^{ab}(Z)$ та $g^a(Z)$ пов'язані із функціями $\varphi^{ab}(Z)$ та $\psi^a(Z)$ деякими співвідношеннями (див. [3]).

В нашій роботі розв'язана задача знаходження нелокальних анзаців нелінійної системи рівнянь конвекції-дифузії вигляду

$$\begin{aligned} z_0^1 &= \partial_1[\tfrac{\lambda}{(z^1)^2} z_1^1], \\ z_0^2 &= \partial_1[-\tfrac{k\lambda}{(z^1)^3} z_1^1 + \tfrac{\lambda}{(z^1)^2} z_1^2 + \tfrac{\gamma_2}{z^1}], \end{aligned} \tag{6}$$

яку, перетворення (2-4) зводять до лінійної системи вигляду:

$$U_t = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ k\lambda & \lambda \end{pmatrix} U_{xx} + \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix} U_x, \tag{7}$$

де $k, \lambda, \gamma_1, \gamma_2 \in R$.

Зауважимо, що система (7) має значно ширший набір операторів ліївських симетрій. Використовуючи знайдені оператори Ліївських симетрій системи (7) та нелокальні перетворення (2-4), для нелінійної системи конвекції-дифузії (6) побудовані нелокальні анзаци, які не можливо одержати в рамках класичного методу Лі.

Зокрема, подіявши перетвореннями (2-4) на один з нееквіалентних анзаців системи (7):

$$\begin{aligned} u^1 &= e^{-A(t,x)}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}\varphi^1(\omega), \\ u^2 &= e^{-A(t,x)}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}[\tfrac{1}{4\lambda}(\gamma_1(k\gamma_1 - 2\gamma_2)t + 2(k\gamma_1 - \gamma_2)x + \tfrac{kx^2t}{t^2+1} + \\ &+(4\lambda k_2 - \gamma_1(k\gamma_1 - 2\gamma_2))arctgt)\varphi^1(\omega) + \varphi^2(\omega)], \\ \omega &= (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}x, \end{aligned} \tag{8}$$

де $A(t,x) = \frac{1}{4\lambda}[\gamma_1^2 t + 2\gamma_1 x + \frac{x^2 t}{t^2+1} - (4\lambda k_1 + \gamma_1^2) arctgt]$, одержано наступний нелокальний анзац нелінійної системи (6):

$$z^1 = (x_0^2+1)^{\frac{1}{4}} e^{A(x_0,\tau)} (\varphi^1(\omega))^{-1},$$
$$z^2 = \frac{1}{4\lambda}[\gamma_1(k\gamma_1 - 2\gamma_2)x_0 + 2(k\gamma_1 - \gamma_2)\tau + \frac{kx_0\tau^2}{x_0^2+1} +$$
$$+(4\lambda k_2 - \gamma_1(k\gamma_1 - 2\gamma_2)) arctgx_0] + (\varphi^1(\omega))^{-1} \cdot \varphi^2(\omega), \qquad (9)$$
$$\omega = (x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}\tau,$$

де $A(x_0,\tau) = \frac{1}{4\lambda}[\gamma_1^2 x_0 + 2\gamma_1 \tau + \frac{x_0\tau^2}{x_0^2+1} - (4\lambda k_1 + \gamma_1^2) arctgx_0]$, $\tau = \int z^1 dx_1$.

Література

[1] Р.А. Васькін. Моделювання розподілу концентрації викидів від автотранспорту у просторі. / Р.А. Васькін, В.О. Соляник, І.В. Васькіна. // Journal of Engineering Sciences, Vol. 2, Issue 2 (2015), pp G1-G5.

[2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнеиий. / Л. В. Овсянников // — М.: Наука, 1978. — 400с.

[3] Омелян О.М. Лінеаризація систем нелінійних рівнянь конвекції-дифузії за допомогою нелокальних перетворень. / О.М. Омелян, М.М. Сєрова. // "Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки". — Випуск 13.— КПНУ: 2016. — С 131-143.

[4] Сєров М.І. Лінеаризація систем нелінійних рівнянь дифузії за допомогою нелокальних перетворень / М.І. Сєров, О.М. Омелян, Р.М. Черніга // Доп. НАН України. 2004.— № 10.— С. 39–45.

[5] Сєров М.І., Омелян О.М. Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису. / М.І. Сєров, О.М. Омелян — Полтава: ПолтНТУ, 2012. — 238 с.

[6] Фущич В. И. О нелокальных анзацах одного иелинейного одномерного уравненя теплопроводности. / В.И. Фущич, Н.И. Серов, Т.К. Амеров // Доклады Академии иаук Украины. — 1992. — 1. с. 26 - 30.

[7] Фущич В.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. / В.И. Фущич, В.М. Штелень, Н.И. Серов // Київ: Наук. думка, 1989. — 335 с.

[8] Чапля Є. Математичне моделювання стаціонарних процесів конвективно-дифузійного масопереносу у бінарних періодичних структурах. / Є. Чапля, О. Чернуха, В. Дмитрук // Доповіді НАН України. - 2011. - № 7. - С. 46-51.

[9] Чернуха О. Математичні моделі стаціонарних процесів конвективної дифузії в регулярних структурах / О. Чернуха, В. Гончарук, В. Дмитрук // Задачі термодифузії та методи їх розв'язку : колект. моногр. / під ред. д.т.н. В. П. Ляшенка - Кременчук : Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, 2012. - С. 91-109.

[10] Fuschich W.I. On non-local symmetry of nonlinear heart equation / W.I. Fuschich, M.I. Serov, V.A. Tychynin, T.K. Amerov. // Proc. Acad of Sci Ukraine 11, 27 (1992), P. 26 - 32.

[11] Olver P., Applications of Lie Groups to Differential Equations. — New York: Springer, 1986. — 497 p.

[12] Tychynin V.A. Nonlocal symmetries and formulae for generation of solutions for a class of diffusion-convection equations / V.A. Tychynin, O.V. Petrova // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — №.382. — P. 20–33.

КОНФОРМНА ІНВАРІАНТНІСТЬ ДВОВИМІРНИХ КВАЗІЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

[1]Сєров Микола, [2]Сєрова Марія, [3]Блажко Людмила

Полтавський національний технічний університет

[1]mserov4@gmail.com, [2]mvusata@gmail.com, [3]LBlazhko@ukr.net

У сучасних дослідженнях у математичній фізиці важливу роль відіграє принцип симетрії [4], [5], [6], [7]. Основні рівняння математичної фізики — Ньютона, Лапласа, Д'Аламбера, Шредінгера, Максвела і т. д., володіють широкими симетрійними властивостями. Квазілінійні хвильові рівняння внаслідок свого широкого застосування є цікавим об'єктом дослідження.

Розглянемо квазілінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$F^{\mu\nu}(u, \underset{1}{u})u_{\mu\nu} + G(u, \underset{1}{u}) = 0 \tag{1}$$

де $F^{\mu\nu}(u, \underset{1}{u})$, $G(u, \underset{1}{u})$ — довільні гладкі функції, $u = u(x) \in R^1$, $x = (x_0, \vec{x}) \in R^{1+n}$, $\underset{1}{u}$ — сукупність всеможливих похідних першого порядку функції u, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu, \nu = 0, \bar{n}$. Зазначимо, що у роботі [8] розглянута задача інваріантності загального рівняння другого порядку відносно алгебри Пуанкаре та деяких її розширень. У роботах [1], [2], [3] для випадку $n = 1$ ми описали всеможливі з точністю до перетворень еквівалентності рівняння класу (1), інваріантні відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,1)$, розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,1)$ та конформної алгебри $AC(1,1)$. У даній роботі ми ставимо аналогічну задачу для випадку $n = 2$.

Лема. *Максимальною групою неперервних перетворень класу рівнянь* (1) *є перетворення вигляду*

$$x'_\mu = \gamma_{\mu\nu}x_\nu + \theta_\mu(u), u' = \alpha_{\mu\nu}x_\mu x_\nu + \beta_\mu x_\mu + \theta(u), \tag{2}$$

де $\gamma_{\mu\nu}$ — довільні сталі, які задають групу $GL(1+n, R)$, $\alpha_{\mu\nu}$, β_μ — групові параметри, $\theta = \theta(u)$, $\theta_\mu = \theta_\mu(u)$ — довільні гладкі функції, $\theta(u) \neq const$.

Всі подальші дослідження проведені з точністю до перетворень (2).