

що падають в дані вікна, можна вважати схилами подібними до еталона.

Суттєвою перевагою даної методики є те, що подібність чи відмінність тієї чи іншої ділянки земної поверхні виражається в цифровій формі і може здійснюватись по цифровій моделі рельєфу практично в режимі реального масштабу часу. Виділені таким чином ділянки земної поверхні мають певну експозицію і отримують відповідний коефіцієнт при рекреаційній оцінці рельєфу. Крім того, методика може використовуватись і в інших прикладних задачах, де є необхідність виділяти ділянки земної поверхні з певною формою рельєфу.

1. Берлянт А.М. Использование карт для целей прогноза. // Картография - Итоги науки и техники.

Т. 7. - М., 1976. - С. 22-36. 2. Горішній П.М. Морфометрична оцінка рельєфу східної частини Українського Розточчя. Природа Розточчя. Ів.-Франкове. 1999. С.46-50. 3. Дж. Ту, Р. Гонсалес. Принципы распознавания образов. - М. Мир, 1978. 411с. 4. Ласточкин А.Н. Рельеф земной поверхности (принципы и методы статистической геоморфологии) - Л.: Недра, 1991. - 340 с. 5. Рудий Р.М. Виділення об'єктів з цифрової моделі рельєфу з використанням теорії розпізнавання образів. // Геодезія, картографія і аерофотознімання. - 1997. - №58. - С. 207-212. 6. Sharif, M. Terrain Morphology Modelling. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing - 18th ISPRS Congress, Vienna, Austria, 1996. Commission 3, P. 792-797.

УДК 621.3:539.6

КОМП'ЮТЕРНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ, МАТЕМАТИЧНОЮ ОСНОВОЮ ЯКИХ Є РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА АБО ПУАССОНА

© Сенчик В.М., Чернов Б.О., Лавинюкова Т.Г., 2001

Івано-Франківський державний технічний університет нафти і газу

Подані окремі результати розробленої сучасної комп'ютерної технології дослідження напружено-деформованого стану пружних стержнів довільного перерізу, а також обговорюється можливість поширення новітніх технологій на широкий клас задач-аналогів.

За останні роки методики роботи інженерів, наукових працівників змінилися докорінно. Стрімке зменшення габаритів і зниження вартості сучасних ЕОМ із одночасним розширенням їх можливостей призвело до повсюдного використання комп'ютерів у різних галузях науки і техніки. Питання "Як можна сформулювати дану задачу на комп'ютері?" змушує по-новому подивитись на попередні задачі і дає змогу розглядати більш складніші [1].

В роботі [2] запропонована інформаційна технологія дослідження напружено-деформованого стану пружних стержнів довільного перерізу. Ефективний підхід використовує новий варіант методу Монте-Карло, в якому апостеріорні перехідні ймовірності у схемі випадкових блукань вперше замінені апріорними. Це призводить до суттєвого прискорення обчислень, що досягається застосуванням спеціального обчислювального шаблону у формі симплекс-елемента. Вдале поєднання ймовірнісних ідей методу Монте-Карло і барицентричних координат симплексу звільняє від необхідності складати і розв'язувати великі системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Традиційне нанесення сітки скінченних елементів на досліджувану область також стає не потрібним,

досить передбачити обертання симплекса, який транслює граничну інформацію у досліджувану точку. Розроблені математичні моделі і написані ефективні та зручні у користуванні комп'ютерні програми, що реалізують алгоритми способу обертання симплексу (СОС). Розроблена і описана технологія комп'ютерної реалізації СОС на прикладах стаціонарної температурної задачі [3] та задачах кручення пружних стержнів складного перерізу [4].

Задача побудови стаціонарного поля температур всередині деякої області при заданій температурі на границі цієї області зводиться до розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа.

Подамо стислий виклад основних результатів комп'ютерного аналізу задачі про стаціонарний розподіл температур в квадратній пластині [6]. Ця задача з геометрично простою областю приваблива тим, що на ній можна порівняти різні обчислювальні методи і прослідкувати за перевагами і недоліками кожного з них.

Нехай потрібно знайти стаціонарний розподіл температур в квадратній пластині, на сторонах якої $x=0$ і $x=1$ підтримується температура 0 і 100°C

відповідно, на стороні $y=0$ температура зростає лінійно, а на $y=1$ – за законом квадратичної параболи.

В [6] задача з 25 вузлами (з них 9 внутрішніх) розв'язувалась методом скінченних різниць з наступним розв'язуванням отриманої системи рівнянь як прямим (правило Крамера), так і ітераційними методами. Розв'язок, отриманий за правилом Крамера, прийнято за точний. Цей же результат досягається за 30 ітерацій методу одночасних зміщень, 16 ітерацій методу послідовних зміщень і 9 ітерацій методу послідовної верхньої релаксації.

Практично таку ж точність дає спосіб СОС, який видає на екран дисплею числові результати для будь-якої точки області. При цьому для використання стандартної програми розв'язування рівняння Лапласа в довільній області методом прискорених статистичних випробувань досить знань оператора ПЕОМ.

Для обчислень значень температур $T(A)$ в досліджуваних точках A_1, A_2, \dots, A_9 застосуємо стандартну програму. Вхідними даними будуть: координати внутрішніх вузлів A_1, A_2, \dots, A_9 ; координати граничних вузлів B_1, B_2, \dots, B_{12} ; значення температур $T(B)$ в граничних вузлах B_1, B_2, \dots, B_{12} . При комп'ютерних розрахунках використаємо три обчислювальні шаблони (форми) симплексів: шаблон 1 (B_1, B_4, B_7), шаблон 2 (B_1, B_5, B_9), шаблон 3 (B_1, B_6, B_{11}) (рис. 1). Результати обчислень за кожним шаблоном, а також їх середнє арифметичне значення подані в порівняльній табл. 1. Відносна похибка δ (%) результатів обчислень по окремих точках досліджуваної області міститься в межах $0,1 \leq \delta \leq 2,5$, що свідчить про досить високу точність запропонованого нами підходу.

Розв'язком задачі кручення є функція напружень Прандтля, яка задовольняє рівнянню Пуассона і набуває на контурі сталих значень, причому для однорідної області її значення на контурі можна вважати рівними нулю.

Як модельну розглянемо задачу кручення однорідного призматичного стержня, взяту нами з [7], де вона розв'язувалась за допомогою МСР і МСЕ. Автор С.Короткова використала МСР з поділом області на 20 частин. На рис. 2 для цього випадку показані розрахункові точки, в яких визначались значення функції напружень, а з їх допомогою були обчислені крутний момент і максимальне дотичне напруження. Задача Діріхле для рівняння Пуассона розв'язувалась в [7] методом

сіток з 31 вузлами, з яких 11 внутрішніх (рис. 2). Отриману систему рівнянь розв'язували методом Гаусса. Оскільки точний розв'язок для такої форми поперечного перетину невідомий, то результати обчислень порівнювались з точним розв'язком для аналогічного прямокутного перетину при однакових висотах (рис. 2). Результати порівняння дали можливість оцінити тільки порядок напружень: обидва напруження одного порядку. При розв'язуванні цієї ж задачі методом скінченних елементів досліджувана область була поділена на 40 прямокутних трикутників. При формуванні матриці жорсткості враховувались 29 вузлів, з них 11 внутрішніх, для яких потрібно було знайти значення функції напружень, тобто розширена матриця жорсткості системи мала порядок (11×11) .

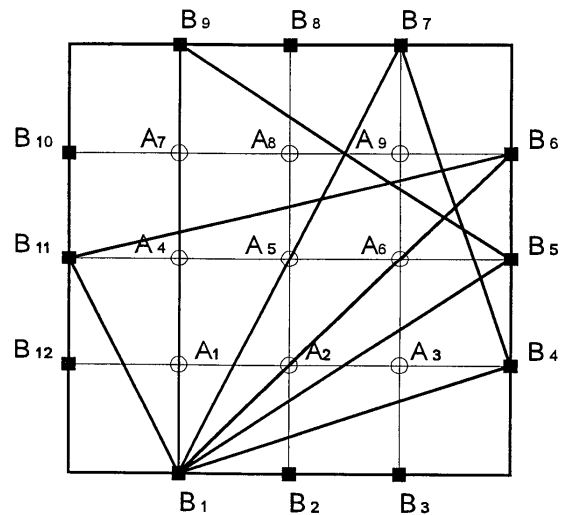


Рис. 1. Розрахункові точки на пластині і обчислювальні шаблони:

(B_1, B_4, B_7) , (B_1, B_5, B_9) , (B_1, B_6, B_{11}) .

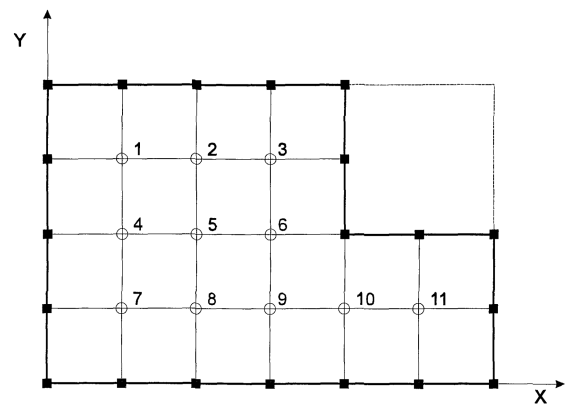


Рис. 2. Форма поперечного перетину і розрахункові точки в МСР.

Таблиця 1 – Результати комп’ютерного аналізу температурної задачі із застосуванням СОС.

Розрахункові точки	Точний розв’язок	СОС шаблон 1	СОС шаблон 2	СОС шаблон 3	СОС (середнє арифметичне)	Відносна похибка δ , (%)
A_1	23,493	24,375	22,656	23,958	23,663	0,7
A_2	47,879	47,143	49,143	47,591	47,984	0,2
A_3	73,493	74,375	72,656	73,958	73,663	0,2
A_4	21,094	21,964	19,792	23,177	21,644	2,5
A_5	44,531	44,792	44,792	44,705	44,763	0,5
A_6	71,094	71,964	69,792	73,177	71,644	0,7
A_7	16,350	15,208	17,969	15,625	16,267	0,5
A_8	38,058	37,500	40,365	35,482	37,782	0,7
A_9	66,350	65,208	67,969	65,625	66,267	0,1

Розрахунки проводились на ЕОМ за допомогою програми визначення напружень в стержнях довільного поперечного перетину, написаній на алгоритмічній мові FORTRAN. Порівняння максимальних дотичних напружень, обчислених МСР і МСЕ, дало відносну похибку 38%, хоча значення функції напружень у внутрішніх точках були однакові.

Покажемо, як можна розв’язати задачу кручення стержня некрутлого поперечного перетину (рис. 3) за допомогою стандартної програми [4].

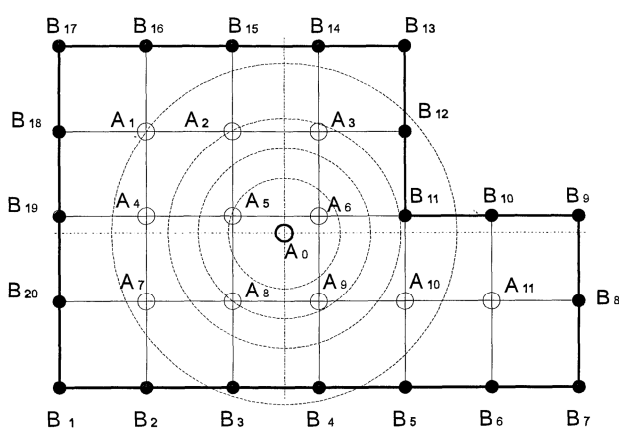


Рис. 3. Форма поперечного перетину і розрахункові точки в СОС.

Для виконання потрібних розрахунків необхідно

надати таку інформацію:

координати досліджуваних точок $A(M)$;

координати граничних вузлових точок $B(N)$;

значення константи H , необхідної для утворення симплекс-елемента.

Результати комп’ютерного аналізу подані в порівняльній табл. 2. Порівняння результатів обчислень за СОС і отриманих альтернативними методами дало підставу зробити такі основні висновки: СОС визначає значення функції напружень для будь-якої кількості довільно розміщених точок або в окремій точці; числові результати знаходяться у строгій відповідності з мембранною аналогією Прандтля. Відзначимо, що процедурні підготовки і введення інформації настільки прості, що для їх виконання не потрібно спеціальних знань.

Запропоновані алгоритми і програми комп’ютерного моделювання достатньо інформативні, тому їх можна успішно використовувати при розв’язуванні задач, математичною основою яких є рівняння еліптичного типу, що виникають у інших прикладних задачах, наприклад, при розв’язуванні задач з гідродинаміки, теплопровідності, теорії пружності. Зокрема, двовимірне рівняння Пуассона моделює такі явища:

- теплопровідність у неперервному режимі

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -q, \quad (1)$$

- електростатику

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial Y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = -p, \quad (2)$$

- магнітостатику

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -j_z. \quad (3)$$

Таблиця 2 – Результати комп'ютерного аналізу задачі кручення.

Досліджувані точки	MCP, MCE	COС
A_0	—	2,659
A_1	1,390	1,750
A_2	1,780	1,871
A_3	1,410	1,875
A_4	1,780	1,833
A_5	2,320	2,470
A_6	1,860	2,552
A_7	1,410	2,020
A_8	1,860	2,068
A_9	1,710	2,333
A_{10}	1,123	1,500
A_{11}	0,781	1,250

Задачі на розрахунок циліндричних трубок, що знаходяться під дією рівномірного внутрішнього або зовнішнього тиску, зводяться до задач площинної деформації [5], математичною основою яких є диференціальне рівняння в частинних похідних четвертого порядку такого виду:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \quad (4)$$

де $\varphi(x, y)$ – функція напружень. У полярній системі координат дане рівняння можна подати у такому виді:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Theta^2} \right) = 0. \quad (5)$$

Цілком очевидно, що кожен розв'язок рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Theta^2} = 0 \quad (6)$$

буде також і розв'язком вказаного диференціального рівняння четвертого порядку, що дає змогу застосувати запропоновану комп'ютерну технологію для розв'язування, наприклад, задачі про напружений стан газопроводу з корозійними пошкодженнями.

Новий підхід до розв'язування крайових задач еліптичного типу відкриває широкі можливості для постановки ряду задач в подальших теоретичних і експериментальних дослідженнях, а також розробки сучасних технологій їх комп'ютерної реалізації.

1. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Часть 2. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 400 с. 2. Сеничак В.М. Прогресивна інформаційна технологія дослідження напружено-деформованого стану пружних стержнів довільного перерізу / Сучасні проблеми математики: Матеріали міжнар. наук. конф. Ч. 3. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – С. 77-79. 3. Сеничак В.М. Комп'ютерна діагностика температурних полів в областях складної форми / Математическое моделирование: Сб. науч. тр. / НАН Украины, Ин-т математики. – К., 1996. – С. 209-212. 4. Сеничак В.М., Хомченко А.Н. Программа решения уравнения Пуассона в произвольной области методом ускоренных статистических испытаний / ФАП ИПС АН Украины. – К., 1993. – 25 с. – инв. № П6412. 5. Безухов Н.И., Лузин О.В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. – М.: Высшая школа, 1974. – 200 с. 6. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство. – М., 1982. – 238 с. 7. Короткова С.Е. Численные методы решения задач строительства на ЭВМ. Лабораторные занятия: Учеб. пособие. – К.: Вища школа, 1990. – 181 с.