Дослідження та методи аналізу

УДК 622.279.04 + 622.691.4

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕУСТАЛЕНОГО РУХУ ПІСКУ У СВЕРДЛОВИНІ

[1]В.С.Бойко, [2]І.А.Франчук, [2]С.І.Іванов, [1]С.П.Поліщук

[1]*ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (03422) 994196, e-mail: rector@ifdtung.if.ua*

[2]*ДАТ "Чорноморнафтогаз", 95000, Україна, АР Крим, м. Сімферополь, просп. Кірова / пров. Раднаргоспівський, 52/1, тел. (0652) 523408, e-mail: office@gas.crimea.ua*

Рассмотрено неустановившееся движение песчинки в вязкой среде под воздействием силы тяжести с учетом возможности перехода ламинарного обтекания в турбулентное. Сделаны практические выводы.

There has been observed the unsteady movement of grain in viscous environment under the action of gravitation force with consideration of possible transfer from laminar streamline into turbulent. There have been done the practical conclusions.

Різні процеси газо- і нафтовидобування пов'язані з неусталеним рухом дисперсної системи, зокрема експлуатація свердловин у нестійких колекторах. Неусталений рух частинок у газовому середовищі досліджувався в роботі [1]. В доповнення нами розглянуто рух окремої частинки в рідині за ламінарного і турбулентного обтікань та за умови можливого переходу ламінарного обтікання в турбулентне.

На тіло (частинку), яке рухається в нерухомій крапельній або стисливій (газоподібній) рідині, діють сила ваги, виштовхувальна (архімедова) сила, інерційна сила та сила опору середовища.

Сила ваги

$$F_{\text{в}} = Mg = V\rho_{\text{ч}} g, \qquad (1)$$

де: M – маса частинки; g – прискорення вільного падіння; V – об'єм частинки (піщинки); $\rho_{\text{ч}}$ – густина матеріалу частинки.

Архімедова сила

$$F_{\text{а}} = V\rho g, \qquad (2)$$

де ρ – густина рідини.

За другим законом Ньютона інерційна сила

$$F_{\text{і}} = M\frac{dw}{dt}, \qquad (3)$$

де: w – швидкість руху частинки; t – час.

Сила опору середовища в загальному випадку (за Релеєм) [2]

$$F_0 = \psi d_{\text{ч}}^2 \rho w^2, \qquad (4)$$

де: ψ – безрозмірний коефіцієнт опору за Релеєм; $d_{\text{ч}}$ – діаметр частинки.

Коефіцієнт опору визначається властивостями і режимом обтікання рідиною піщинки, тобто є функцією параметра Рейнольдса Re. Параметр Рейнольдса, як відомо, характеризує співвідношення між силами в'язкого тертя в рухомій рідині (динамічний коефіцієнт в'язкості рідини – μ) і силами інерції ($wd_{\text{ч}}\rho$). За малих його значин переважають сили в'язкого тертя, а за великих – сили інерції, або, інакше, за малих значин Re (ламінарне обтікання) можна взагалі нехтувати силами інерції, а за великих (турбулентне обтікання) – силами в'язкого тертя. Стосовно випадку нехтування силами інерції за Стоксом сила опору середовища

$$F_0' = aw, \qquad (5)$$

а стосовно випадку нехтування силами в'язкого тертя за Ріттінгером –

$$F_0'' = в w^2, \qquad (6)$$

де a, $в$ – деякі коефіцієнти.

Найбільш обґрунтованим фізично буде підхід, коли одночасно враховувати дії в'язкісних та інерційних сил, що проявляються різною мірою за різних швидкостей руху. Звідси силу опору записуємо так:

$$F_0 = F_0' + F_0'' = aw + вw^2, \qquad (7)$$

тобто, в разі малих швидкостей, коли $aw >> вw^2$, нехтуємо другим членом, що характеризує інерційні сили, і дістаємо безінерційний закон Стокса, а в разі великих швидкостей, коли $вw^2 >> aw$, нехтуємо першим членом і отримуємо формулу Ріттінгера.

Проектуючи ці сили на напрям руху, маємо

$$-F_в + F_а + F_і + F_о = 0\,, \tag{8}$$

а в розгорнутому вигляді

$$\frac{dw}{dt} = A - Bw - Cw^2, \tag{9}$$

де: $A = \frac{g(\rho_ч - \rho)}{\rho_ч}$; $B = \frac{a}{V\rho_ч}$; $C = \frac{в}{V\rho_ч}$.

Оскільки за формулою Стокса

$$F_0' = 3\pi d_ч \mu w, \tag{10}$$

а за формулою Ріттінгера

$$F_0'' = \frac{\pi d_ч^2 \rho}{16} w^2, \tag{11}$$

то сила опору

$$F_0 = 3\pi d_ч \mu w + \frac{\pi d_ч^2 \rho}{16} w^2. \tag{12}$$

Із рівняння балансу сил, які діють на окрему частинку за умови справедливості закону Стокса для ламінарного ("повзучого") режиму обтікання маємо

$$M\frac{dw}{dt} = Vg(\rho_ч - \rho) - \zeta\mu w, \tag{13}$$

або

$$\frac{dw}{dt} = A - Bw, \tag{14}$$

де: $A = \frac{Vg(\rho_ч - \rho)}{M}$; $B = \frac{\zeta\mu}{M}$.

Інтегруючи дане рівняння, послідовно записуємо

$$\int_0^w \frac{dw}{A - Bw} = \int_0^t dt; \tag{15}$$

$$-\frac{1}{B}\left[\ln(A - Bw) - \ln A\right] = t; \tag{16}$$

$$w_0 = \frac{A}{B}\left(1 - e^{-Bt}\right), \tag{17}$$

а за $t \to \infty$, тобто для усталеного руху

$$w_0 = \frac{A}{B} = \frac{Vg\rho}{\zeta\mu}\left(\frac{\rho_ч}{\rho} - 1\right). \tag{18}$$

Оскільки для сферичної частинки об'єм $V = \frac{1}{6}\pi d_ч^3$, її маса $M = \rho_ч V$, то

$$A = \frac{g\rho}{\rho_ч}\left(\frac{\rho_ч}{\rho} - 1\right);\; B = \frac{\zeta\mu}{\rho_ч V} = \frac{6\zeta\rho g}{\pi\rho_ч \nu}\left(\frac{\rho_ч}{\rho} - 1\right);$$

$$w = \frac{A}{B} = \frac{\pi\nu\,\mathrm{Ar}}{6\zeta};\; w(t) = w_0\left(1 - e^{-Bt}\right)$$

звідки

$$\zeta = \frac{\pi\rho_ч\,\mathrm{Ar}}{\mathrm{Re}}, \tag{19}$$

де: $\mathrm{Re} = \frac{wd_ч\rho}{\mu}$ – число Рейнольдса;

$\mathrm{Ar} = \frac{gd_ч{}^3\rho(\rho_ч - \rho)}{\mu^2}$ – число Архімеда.

За даними Стокса $\zeta = \zeta_{ст} = 3\pi d_ч$, тоді $B = \frac{18\mu}{d_ч^2\rho_ч}$, $w_0 = \frac{A}{B} = \frac{gd_ч^2\rho}{\mu}\left(\frac{\rho_ч}{\rho} - 1\right)$, тобто для усталеного руху маємо формулу Стокса

$$w = \frac{gd_ч^2}{18\nu}\left(\frac{\rho_ч}{\rho} - 1\right), \tag{20}$$

і для неусталеного руху –

$$w(t) = w_0\left(1 - e^{-\frac{18\mu t}{d_ч^2\rho_ч}}\right). \tag{21}$$

Можна також записати

$$\zeta = \frac{\zeta_{ст}}{18}\frac{\mathrm{Ar}}{\mathrm{Re}}, \tag{22}$$

тобто, за $\mathrm{Re} > 0$ коефіцієнт опору $\zeta > \zeta_{ст}$, оскільки відношення $\frac{\mathrm{Ar}}{\mathrm{Re}}$ із зростанням числа Re лінійно зростає.

Тривалість часу, протягом якого швидкість стабілізується від початкової швидкості w_0' до кінцевої величини w_0, знайдемо з рівняння

$$\int_{w_0'}^{w_0} \frac{d\,w}{A - Bw} = \int_0^t d\,t\,, \tag{23}$$

або

$$w(t) = w_0 - (w_0 - w_0')e^{-\frac{18\mu t}{d_ч^2\rho_ч}}, \tag{24}$$

тобто:

$$t = \frac{d_ч^2\rho_ч}{18\mu}\ln\frac{w_0 - w(t)}{w_0 - w_0'}. \tag{25}$$

Для визначення шляху, пройденого частинкою за час t, записуємо

$$S = \int w dt + c\,, \tag{26}$$

або

$$S = \int \frac{A}{B}\left(1 - e^{-Bt}\right)dt, \tag{27}$$

звідки

$$S + c = \frac{A}{B}t + \frac{A}{B^2}e^{-Bt}, \tag{28}$$

де c – постійна інтегрування.

Оскільки за $t = 0$ шлях $S = 0$, то

$$c = \frac{A}{B^2}, \tag{29}$$

а тоді

$$S = \frac{A}{B}t + \frac{A}{B^2}\left(e^{-Bt} - 1\right) = \frac{A}{B}t - \frac{1}{B}w. \tag{30}$$

Якщо взяти $w = w_0' = \mathrm{const}$, то отримаємо

$$S = \frac{Vg\rho_ч}{\zeta\mu}\left(\frac{\rho_ч}{\rho} - 1\right)t = \frac{gd_ч^2}{18\nu}\left(\frac{\rho_ч}{\rho} - 1\right)t. \tag{31}$$

Описавши силу опору середовища формулою Релея стосовно турбулентного режиму обтікання у вигляді

$$F_о = c_х\frac{\pi d_ч^2}{8}\rho w^2, \tag{32}$$

аналогічно маємо

$$M\frac{dw}{dt} = Vg\left(\rho_ч - \rho\right) - \frac{c_х\pi d_ч^2}{8}\rho w^2, \tag{33}$$

або

$$\frac{dw}{dt} = A - B_1 w^2, \tag{34}$$

де: $\psi = \frac{c_х\pi}{8}$; $B_1 = \frac{c_х\pi d_ч^2\rho}{8M} = \frac{\psi d_ч^2\rho}{M}$; $c_х$ – коефіцієнт лобового опору.

Тоді, інтегруючи, отримуємо

$$\int\frac{dw}{A - B_1 w^2} = \int dt; \tag{35}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{AB_1}}\ln\frac{\sqrt{A} + w(t)\sqrt{B_1}}{\sqrt{A} - w(t)\sqrt{B_1}} = t + c; \tag{36}$$

де c – постійна інтегрування.

Оскільки $w = 0$ за $t = 0$, то знаходимо

$$\frac{1}{2\sqrt{AB_1}}\ln\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}} = c; \quad c = 0. \tag{37}$$

Перетворюючи знайдений вираз, маємо

$$\frac{\sqrt{A} + w(t)\sqrt{B_1}}{\sqrt{A} - w(t)\sqrt{B_1}} = e^{2t\sqrt{AB_1}}; \tag{38}$$

$$w(t) = \sqrt{\frac{A}{B_1}}\,\frac{1 - e^{-2t\sqrt{AB_1}}}{1 + e^{-2t\sqrt{AB_1}}}, \tag{39}$$

або після розкладання експоненти в ряд з двома першими членами ряду

$$w(t) \approx \sqrt{\frac{A}{B_1}}\,\frac{t\sqrt{AB_1}}{t\sqrt{AB_1} + 1}, \tag{40}$$

а якщо $t \to \infty$, то для усталеного руху

$$w_0 = \sqrt{\frac{A}{B_1}} = \sqrt{\frac{Vg\left(\rho_ч - \rho\right)\cdot 8M}{Mc_х\pi d_ч^2\rho}} = \sqrt{\frac{8Vg}{c_х\pi d_ч^2}\left(\frac{\rho_ч}{\rho} - 1\right)} = \sqrt{\frac{Vg}{\psi d_ч^2}\left(\frac{\rho_ч}{\rho} - 1\right)}. \tag{41}$$

Якщо аналогічно взяти об'єм $V = \frac{1}{6}\pi d_ч^3$, то отримаємо формулу швидкості стосовно усталеного руху

$$w_0 = \sqrt{\frac{4gd_ч}{3c_х}\left(\frac{\rho_ч}{\rho} - 1\right)} = \sqrt{\frac{\pi gd_ч}{6\psi}\left(\frac{\rho_ч}{\rho} - 1\right)}, \tag{42}$$

або формулу коефіцієнта опору

$$\psi = \frac{\pi d_ч g}{6w_0^2}\left(\frac{\rho_ч}{\rho} - 1\right). \tag{43}$$

Якщо стосовно турбулентного руху взяти $c_х = 0{,}44$, то отримаємо формулу Ріттінгера

$$w_0 = 1{,}74\sqrt{gd_ч\left(\frac{\rho_ч}{\rho} - 1\right)}, \tag{44}$$

де $\psi = 0{,}173$.

Взявши $w(t) = w_0'$ за $t = 0$, знаходимо

$$\frac{1}{2\sqrt{AB_1}}\ln\frac{\sqrt{A} + w_0'\sqrt{B_1}}{\sqrt{A} - w_0'\sqrt{B_1}} = c; \tag{45}$$

$$w(t) = w_0\frac{\dfrac{w_0 + w_0'}{w_0 - w_0'} - e^{-\frac{0{,}66\rho w_0}{d_ч\rho_ч}t}}{\dfrac{w_0 + w_0'}{w_0 - w_0'} + e^{-\frac{0{,}66\rho w_0}{d_ч\rho_ч}t}}, \tag{46}$$

де: $w = 1{,}74\sqrt{gd_ч\left(\frac{\rho_ч}{\rho} - 1\right)}$; $c_х = 0{,}44$;

$$A = \frac{g\rho}{\rho_ч}\left(\frac{\rho_ч}{\rho} - 1\right);\quad B_1 = \frac{3}{4}\frac{c_х\rho}{d_ч\rho_ч} = \frac{0{,}33\rho}{d_ч\rho_ч}.$$

Звідси знаходимо тривалість часу для стабілізації швидкості

$$t = \frac{d_ч\rho_ч}{0{,}66\rho w_0}\ln\left[\frac{w_0 - w_0'}{w_0 + w_0'}\,\frac{w_0 + w(t)}{w_0 - w(t)}\right]. \tag{47}$$

Аналогічно знаходимо довжину шляху, пройденого частинкою за час t стосовно випадку турбулентного руху

$$S=\int_0^t w(t)dt=\sqrt{\frac{A}{B_1}}\int_0^t \frac{t\sqrt{AB_1}}{t\sqrt{AB_1}+1}dt=$$

$$=\sqrt{\frac{A}{B_1}}\left[\left(t+\frac{1}{\sqrt{AB_1}}\right)-\frac{1}{\sqrt{AB_1}}ln\left(t+\frac{1}{\sqrt{AB_1}}\right)\right]\Bigg|_0^t= \quad (48)$$

$$=\sqrt{\frac{A}{B_1}}\left[t-\frac{1}{\sqrt{AB_1}}ln\left(t\sqrt{AB_1}-1\right)\right],$$

або

$$S=w\left[t-\frac{d_ч\rho_ч}{0{,}33\,\rho\,w}\ln\left(\frac{0{,}33\,\rho\,wt}{d_ч\rho_ч}-1\right)\right], \quad (49)$$

а за $w(t) = w_0 = \text{const}$

$$S=t\sqrt{\frac{8Vg}{c_x d_ч^2}\left(\frac{\rho_ч}{\rho}-1\right)}=t\sqrt{\frac{Vgd_ч^2}{6\psi}\left(\frac{\rho_ч}{\rho}-1\right)}.$$

Оскільки в процесі осадження частинки швидкість зростає від нуля до певної величини, то спочатку буде мати місце ламінарний рух, а відтак може наступити турбулентний рух. У такому разі коефіцієнт опору руховi частинки за [1] беремо у вигляді

$$\psi=\frac{\alpha}{\text{Re}}+\beta, \quad (50)$$

а тоді маємо

$$M\frac{dw}{dt}=Vg(\rho_ч-\rho)-\left(\frac{\alpha}{\text{Re}}+\beta\right)\frac{\pi d_ч^2}{4}\frac{\rho w^2}{2}, \quad (51)$$

або

$$\frac{d\,w}{d\,t}=c-вw-aw^2, \quad (52)$$

де: $M=\rho_ч V$; $V=\frac{\pi d_ч^3}{6}$; $a=\frac{3\rho\beta}{4\rho_ч d_ч}$;

$$в=\frac{3\mu\alpha}{4\rho_ч d_ч^2};\ c=\frac{g(\rho_ч-\rho)}{\rho_ч};\ \text{Re}=\frac{w\rho d_ч}{\mu}.$$

Розділяючи змінні, маємо

$$\int\frac{d\,w}{c-вw-aw^2}=\int d\,t, \quad (53)$$

а, інтегруючи за умови $в^2+4ac>0$, отримуємо

$$-\frac{1}{\sqrt{в^2+4ac}}\ln\frac{w+\frac{в-\sqrt{в^2+4ac}}{2a}}{w+\frac{в+\sqrt{в^2+4ac}}{2a}}=t+c_1, \quad (54)$$

або

$$\ln\frac{w+\frac{в-\sqrt{в^2+4ac}}{2a}}{w+\frac{в+\sqrt{в^2+4ac}}{2a}}=-t\sqrt{в^2+4ac}-\ln c_2, \quad (55)$$

звідки $\quad \dfrac{w+\frac{в-\sqrt{в^2+4ac}}{2a}}{w+\frac{в+\sqrt{в^2+4ac}}{2a}}=c_2e^{-t\sqrt{в^2+4ac}}.$

Взявши $w(t)=w_0'$ за $t=0$ (початкові умови), знаходимо

$$c_2=\frac{w_0'+\frac{в-\sqrt{в^2+4ac}}{2a}}{w_0'+\frac{в+\sqrt{в^2+4ac}}{2a}}, \quad (56)$$

а тоді

$$w=\frac{\frac{w_0'+d_1}{w_0'+d_2}d_2e^{-td_3}-d_1}{1-\frac{w_0'+d_1}{w_0'+d_2}e^{-td_3}},$$

де:

$$d_1=\frac{в-\sqrt{в^2+4ac}}{2a}=$$

$$=\frac{\alpha\mu}{2\beta d_ч\rho}-\sqrt{\left(\frac{\alpha\mu}{2\beta d_ч\rho}\right)^2+\frac{4gd_ч(\rho_ч-\rho)}{2\beta\rho}};$$

$$d_2=\frac{в+\sqrt{в^2+4ac}}{2a}= \quad (57)$$

$$=\frac{\alpha\mu}{2\beta d_ч\rho}+\sqrt{\left(\frac{\alpha\mu}{2\beta d_ч\rho}\right)^2+\frac{4gd_ч(\rho_ч-\rho)}{2\beta\rho}};$$

$$d_3=\sqrt{в^2+4ac}=\sqrt{\left(\frac{3\mu\alpha}{4d_ч^2\rho_ч}\right)^2+\frac{3g\rho\beta(\rho_ч-\rho)}{d_ч\rho_ч}}.$$

Коли $t\to\infty$, то за малих Re дане рівняння наближається до закону Стокса, а за великих значин Re – до рівняння Ріттінгера.

Аналіз засвідчує, що теоретично тривалість часу стабілізації швидкості осадження частинки рівна нескінченності ($t\to\infty$), але практично усталена швидкість настає уже через декілька секунд або навіть через частки секунди за невеликих розмірів частинки. Тому можна нехтувати тривалістю наростання швидкості і вважати швидкість частинки стабільною в часі.

Література

1. Коротаев Ю.П. Комплексная разведка и разработка газовых месторождений. – М.: Недра, 1968. – 428 с.

2. Кудряшов Б.Б., Кирсанов А.И. Бурение разведочных скважин с применением воздуха. – М.: Недра, 1990. – 263 с.