

## Література

1. Чекурін В.Ф., Олійник А.П. Некоректна задача відновлення напружено-деформованого стану криволінійних циліндричних тіл за відомими переміщеннями певної множини точок поверхні // Крайові задачі термомеханіки. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – Ч.2. – С. 160-164.

2. Перун И.В. Магистральные трубопроводы в горных условиях. – М.Недра, 1987. – 175 с.

3. Olijnik A., Robur L., Jarovoi L. Determination of stress-deformation state of vibrating constructions by fiber Laser Doppler anemometer. –

Third International Conference "Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications", 1998, Proc. SPIE, V.3411, p.404-407.

4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608 с.

5. Мартинюк Х.В., Олійник А.П. Математичне моделювання напружено-деформованого стану ділянок трубопроводу з оптимізацією процедури згладжування початкових даних // Методи та прилади контролю якості. – 2005. – № 13. – С. 21- 25.

6. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Высш. школа, 1989. – 263 с.

УДК 681.3.06+681.518.54.621.51

## ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДІАГНОСТИЧНИХ ОЗНАК НАГНІТАЧА ПРИРОДНОГО ГАЗУ

М.І.Горбійчук, М.І.Козуляк, О.А.Сріпка

ІФНТУНГ; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (03422) 42331;  
e-mail: public@nung.edu.ua

*Рассматривается алгоритм идентификации параметров диагностической модели центробежного нагнетателя природного газа, которая учитывает энергетические затраты на трение и утечки газа и приведены результаты его апробирования на промышленных данных*

*The algorithm of identifying of arguments of diagnostic model of a centrifugal supercharger of gas distillate is esteemed, which one allows for power expenditures for abrasion and gas escapes and the outcomes it are reduced are checked on industrial data's.*

### 1 Постановка задачі

В роботі [1] запропонована діагностична модель відцентрованого нагнітача природного газу, яка має такий вигляд:

$$\left(\frac{z_1 \varepsilon}{z_2}\right)^{\frac{m-1}{m}} = 1 + \frac{\omega^2}{z_1 R T_1} X_0 - \frac{Q_1 \omega}{z_1 R T_1} \left( X_2 \varepsilon^{\frac{1}{m}} - X_1 \right), \quad (1)$$

де:  $z_1, z_2$  – коефіцієнти стисливості газу відповідно за умов входу і виходу;

$\varepsilon$  – ступінь стискування газу;

$\omega$  – кутова швидкість обертання колеса нагнітача;

$R$  – газова постійна;

$Q_1$  – об'ємна витрата газу приведена до умов всмоктування;

$T_1$  – температура газу на вході в нагнітач;

$m$  – показник політропи.

Величини  $X, Y_1$  і  $Y_2$ , що входять в формулу (1), обчислюються у відповідності з такими співвідношеннями:

$$X_0 = \frac{D_2^2 - D_1^2}{2}, \quad (2)$$

$$X_i = \frac{D_i}{\pi D_i^2 - r \delta_i b_i} \operatorname{ctg} \beta_i, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

де:  $D_1, D_2$  – внутрішній і зовнішній діаметри нагнітача;

$\beta_1, \beta_2$  – кут нахилу лопаток на вході і виході колеса;

$\delta_1, \delta_2$  – товщина лопаток на вході і виході нагнітача;

$b_1, b_2$  – товщина відцентрового колеса на вході і на виході;

$r$  – кількість лопаток.

Оскільки величини  $X, Y_1$  і  $Y_2$  визначаються виключно конструктивними параметрами нагнітача і пов'язані з технологічними параметрами через рівняння (1), то їх прийнято за діагностичні ознаки [1].

Для визначення технічного стану відцентрового нагнітача в [1] запропонована така методика. На протязі однієї доби за дев'ятьма замірами визначались параметри  $X, Y_1$  і  $Y_2$ , що входять в модель (1). Результати усереднювались, і для кожної діагностичної ознаки обчислювався довірчий інтервал при ступеню надійності 0,95. Зміна діагностичної ознаки призво-

дять до виходу її за межі довірливого інтервалу, що, на думку авторів роботи [1], вказує на зміну технічного стану відцентрового нагнітача.

Проаналізуємо запропоновану методику. Відомо, що довірливий інтервал визначається за допомогою формули [2]

$$\bar{X} - t_{1-\alpha/2} s_{\bar{X}} \leq \mu_X < \bar{X} + t_{1-\alpha/2} s_{\bar{X}},$$

де:  $\bar{X}$  – оцінка математичного сподівання випадкової величини  $X$ ;

$t_{1-\alpha/2}$  –  $t$ -статистика Стьюдента;

$s_{\bar{X}}$  – оцінка дисперсії випадкової величини;

$\mu_X$  – математичне сподівання випадкової величини  $X$ .

Із останньої формули випливає, що ширина довірливого інтервалу залежить від потужності вибірки величини  $X$ , від її закону розподілу, та від вибраної довірливої ймовірності  $1 - \alpha$ . Остання величина носить суб'єктивний характер і немає формалізованих правил її вибору.

Таким чином, вихід діагностичної ознаки за довірливий інтервал може бути викликаний не тільки зміною технічного стану відцентрового нагнітача, але й цілим рядом інших факторів, таких як потужність вибірки, закон розподілу випадкової величини  $X$  і вибраною ймовірністю  $1 - \alpha$ .

Іншою причиною виходу випадкової величини за довірливий інтервал може бути некоректність поставленої задачі, яка впливає із способу визначення діагностичних ознак моделі (1).

Рівняння (1) перепишемо в такій формі:

$$\frac{\omega^2}{z_1 RT_1} X_0 + \frac{Q_1 \omega}{z_1 RT_1} X_1 - \frac{Q_1 \omega}{z_1 RT_1} \varepsilon^{\frac{1}{m}} X_2 = \left( \frac{z_1 \varepsilon}{z_2} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1. \quad (4)$$

Якщо ввести позначення

$$a_X = \frac{\omega^2}{z_1 RT_1}, \quad a_{Y_1} = \frac{Q_1 \omega}{z_1 RT_1}, \quad a_{Y_2} = \frac{Q_1 \omega}{z_1 RT_1} \varepsilon^{\frac{1}{m}}$$

$$\text{і } b_z = \left( \frac{z_1 \varepsilon}{z_2} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1,$$

то отримаємо рівняння

$$a_X X_0 + a_{Y_1} X_1 + a_{Y_2} X_2 = b_z,$$

яке є лінійним відносно шуканих величин  $X_0$ ,  $X_1$  і  $X_2$ .

Для технологічних параметрів, значення яких різні в трьох точках, можемо обчислити коефіцієнти  $a_X^{(i)}$ ,  $a_{Y_1}^{(i)}$ ,  $a_{Y_2}^{(i)}$  і  $b_z^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Тоді складемо таке матричне рівняння:

$$A \bar{x} = \bar{b}, \quad (5)$$

де

$$A = \begin{bmatrix} a_X^{(1)} & a_{Y_1}^{(1)} & a_{Y_2}^{(1)} \\ a_X^{(2)} & a_{Y_1}^{(2)} & a_{Y_2}^{(2)} \\ a_X^{(3)} & a_{Y_1}^{(3)} & a_{Y_2}^{(3)} \end{bmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_z^{(1)} \\ b_z^{(2)} \\ b_z^{(3)} \end{bmatrix}; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}.$$

Якщо б технологічні параметри вимірювались точно, то діагностичні ознаки просто визначались би, як розв'язок матричного рівняння (5)

$$\bar{x} = A^{-1} \bar{b}. \quad (6)$$

Насправді технологічні параметри, які входять в рівняння (4), вимірюються з певною похибкою, що приводить до адитивної складової в значеннях елементів матриці  $A$  і в значеннях компонентів векторів  $\bar{x}$  і  $\bar{b}$ . Тобто,

$$(A + \Delta A)(\bar{x} + \Delta \bar{x}) = \bar{b} + \Delta \bar{b}.$$

Якщо розкрити дужки і врахувати рівняння (5), то отримаємо

$$A \Delta \bar{x} + \Delta A \bar{x} + \Delta A \Delta \bar{x} = \Delta \bar{b}. \quad (7)$$

Як правило, похибки вимірювань технологічних параметрів такі, що можна знехтувати доданком  $\Delta A \Delta \bar{x}$  в рівнянні (7). Тоді

$$A \Delta \bar{x} + \Delta A \bar{x} = \Delta \bar{b}.$$

Із останнього співвідношення знаходимо, що

$$\Delta \bar{x} = A^{-1} (\Delta \bar{b} - \Delta A \bar{x}). \quad (8)$$

Формула (8) визначає похибку обчислень діагностичних ознак за наявності похибок вимірювань технологічних параметрів. Оцінимо відносні похибки діагностичних ознак  $X$ ,  $Y_1$  і  $Y_2$ , які виникають, коли технологічні параметри вимірюються з певними похибками.

Має місце таке співвідношення:

$$|\Delta \bar{x}| \leq |A^{-1}| (|\Delta \bar{b}| + |\Delta A| \cdot |\bar{x}|), \quad (9)$$

де  $|\cdot|$  – відповідні норми векторів і матриць.

Для якісної оцінки похибки  $\Delta \bar{x}$  вводиться поняття обумовленості матриці [2]

$$\tau = \frac{|\bar{b}|}{|\bar{x}|} \cdot \frac{|\Delta \bar{x}|}{|\Delta \bar{b}|}. \quad (10)$$

Нехай  $\bar{x}_0$  – розв'язок рівняння (5) для випадку, коли технологічні параметри вимірюються точно, а  $\bar{x}_*$  – розв'язок цього ж рівняння, але для випадку, коли технологічні параметри вимірюються з похибками. Тоді  $A(\bar{x}_* - \bar{x}_0) = \bar{b}_* - \bar{b}_0$ , або  $A \Delta \bar{x} = \Delta \bar{b}$ . Звідси

$$\Delta \bar{x} = A^{-1} \Delta \bar{b}, \quad \text{і відповідно } |\Delta \bar{x}| = |A^{-1}| \cdot |\Delta \bar{b}|.$$

Підставляючи  $|\Delta \bar{x}|$  в (10), приходимо до висновку, що

$$\tau = \frac{|\bar{b}|}{|\bar{x}_0|} \cdot |A^{-1}|.$$

Рівняння (8) запишемо у такому вигляді:

$$\frac{|\Delta \bar{x}|}{|\bar{x}_0|} \leq \frac{|A^{-1}|}{|\bar{x}_0|} \left( \frac{|\Delta \bar{b}|}{|\bar{x}_0|} + |\Delta A| \right).$$

Оскільки  $|A^{-1}| = \tau \frac{|\bar{x}_0|}{|\bar{b}|}$ , то

$$\frac{|\Delta \bar{x}|}{|\bar{x}_0|} \leq \frac{\tau}{|\bar{b}|} \left( \frac{|\Delta \bar{b}|}{|\bar{x}_0|} + |\Delta A| \right).$$

Таким чином, відносна похибка обчислення діагностичних ознак визначається, в основному, зумовленістю  $\tau$  матриці  $A$ . Якщо матриця  $A$  погано зумовлена (велике значення величини  $\tau$ ), то відносна похибка обчислення діагностичних ознак буде значною навіть тоді, коли значення величин  $\frac{|\Delta \bar{b}|}{|\bar{x}_0|}$  і  $|\Delta A|$  невеликі.

Для практичної оцінки точності обчислення вектора діагностичних ознак  $\bar{x}_0$  можна скористатись співвідношенням [2]

$$|A^{-1}| \geq \frac{1}{\min|\lambda_A|},$$

де  $\min|\lambda_A|$  – найменше значення (за модулем) власного числа матриці  $A$ .

Отже, маємо дещо завищену оцінку відносної похибки  $\frac{|\Delta \bar{x}|}{|\bar{x}_0|}$ , тобто

$$\frac{|\Delta \bar{x}|}{|\bar{x}_0|} \leq \frac{1}{|\bar{x}_0| \min|\lambda_A|} \left( \frac{|\Delta \bar{b}|}{|\bar{x}_0|} + |\Delta A| \right). \quad (11)$$

При малому значенні величини  $\frac{|\Delta \bar{b}|}{|\bar{x}_0|}$  формула (11) спрощується і набуває такого вигляду:

$$\frac{|\Delta \bar{x}|}{|\bar{x}_0|} \leq \frac{|\Delta A|}{|\bar{x}_0| \min|\lambda_A|}.$$

Аналіз отриманих результатів засвідчує, що для оцінки похибки обчислення діагностичних ознак, коли технологічні параметри обчислюються неточно, необхідно знайти  $\min|\lambda_A|$  і якщо  $\min|\lambda_A| \ll 1$ , то задача обчислення значень діагностичних ознак за формулою (6) є некоректною.

## 2. Ідентифікація діагностичних ознак

Модель (1) не враховує втрати на протічки газу і тертя дисків. Врахування таких втрат є "важливою задачею, без розв'язку якої неможливо скористатися напором за Ейлером" [2]. Якщо врахувати ці втрати, то отримаємо таку

діагностичну модель відцентрового нагнітача [3]:

$$\left( \frac{\varepsilon}{k_v} - 1 \right) A = n_{II}^2 \times \left( \left( 1 + K_{np} \frac{k_v}{q} \right) \left( X_0 - q \left( \frac{X_2}{k_v} - X_1 \right) \right) + K_T \frac{k_v}{q} \right), \quad (12)$$

де:  $K_T, K_{np}$  – параметри моделі, які визначаються через характеристики відцентрового нагнітача [3];

$q = \frac{Q_1}{\omega} = \frac{Q_{II}}{\omega_n}$  – витрата природного газу через нагнітач, віднесена до одного радіана;

$Q_{II} = Q_1 \frac{n_n}{n}$  – зведена продуктивність нагнітача;

$n_n$  – номінальна частота обертання робочого колеса;

$n_{II} = \frac{n}{n_n} \sqrt{\frac{A_0}{z_1 R T_1}}$  – зведена частота обертання робочого колеса;

$A = \frac{A_0}{\omega_n^2}$ ;  $A_0 = z_0 R_0 T_0$ ;  $z_0, R_0, T_0$  – параметри зведення.

Оскільки  $\omega = 2\pi n$ , то у двох останніх рівняннях можна замінити відношення  $\frac{n}{n_n}$  на

$$\frac{\omega}{\omega_n}. \text{ Тому } q = \frac{Q_1}{\omega} = \frac{Q_{II}}{\omega_n} \text{ і } \omega = n_{II} \omega_n \sqrt{\frac{z_1 R T_1}{A_0}}.$$

Величина  $k_v$ , що входить в рівняння (12), обчислюється за такою формулою:

$$k_v = \frac{\varepsilon}{z\tau}, \quad (13)$$

де:  $z = \frac{z_2}{z_1}$ ;  $\tau = \frac{T_1}{T_2}$ ;  $T_2$  – температура газу на виході нагнітача;

Можна запропонувати той же спосіб визначення параметрів моделі (11), що і для моделі (1), який буде мати ті ж недоліки. Альтернативним способом обчислення значень діагностичних ознак може бути алгоритм, в основі якого лежить метод найменших квадратів (МНК-метод).

Із рівняння (11) знайдемо величину

$$k_v = \frac{r_1}{2r_0} + \sqrt{0.25 \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^2 + \frac{r_2}{r_0}},$$

де:  $r_0 = \frac{X_3}{q} + X_4$ ,  $r_1 = (z\tau - 1) \frac{A}{n_{II}^2} - X_5 - qX_1$ ,  $r_2 = qX_2$ ;

$$X_3 = K_T + K_{np} X_0, \quad X_4 = K_{np} X_1, \\ X_5 = X_0 - K_{np} X_2.$$

Враховуючи значення  $k_v$ , яке обчислюється за формулою (13), отримуємо

$$\varepsilon = z\tau \left( \frac{r_1}{2r_0} + \sqrt{0.25 \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^2 + \frac{r_2}{r_0}} \right). \quad (14)$$

Рівняння (14) є нелінійним відносно параметрів діагностичної моделі. Тому для ідентифікації її параметрів доцільно застосувати нелінійний МНК-метод, суть якого полягає в тому, що мінімізується функціонал

$$J(\bar{x}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N e_j^2(\bar{x}), \quad (15)$$

де:  $\bar{x}^T = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  – вектор параметрів моделі (14);

$e_j(\bar{x}) = \varepsilon(\bar{x}, \bar{u}^{(j)}) - E_j$  – функція нев’язки;

$\varepsilon(\bar{x}, \bar{u}^{(j)})$  – ступінь стиску газу, обчислений за формулою (15);

$E_j$  – ступінь стиску газу, виміряний на об’єкті;

$\bar{u}^T = (q, n_{II})$  – вектор технологічних параметрів.

Множник “1/2” введений в (15) для того, щоб компенсувати “2”, яка виникає при диференціюванні.

Для мінімізації функціонала (15) є доцільним використання спеціальних алгоритмів, що зумовлене особливою структурою градієнта функції  $J(\bar{x})$  і матриці других похідних (матриці Гессе).

Знайдемо градієнт функції (15)

$$\frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = \nabla J(\bar{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial e_j(\bar{x})}{\partial \bar{x}} e_j(\bar{x}),$$

або в матричній формі

$$\nabla J(\bar{x}) = J_a^T(\bar{x}) \bar{e}(\bar{x}), \quad (17)$$

де:

$$J_a(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_1(\bar{x})}{\partial X_1} & \frac{\partial e_1(\bar{x})}{\partial X_2} & \frac{\partial e_1(\bar{x})}{\partial X_3} & \frac{\partial e_1(\bar{x})}{\partial X_4} & \frac{\partial e_1(\bar{x})}{\partial X_5} \\ \frac{\partial e_2(\bar{x})}{\partial X_1} & \frac{\partial e_2(\bar{x})}{\partial X_2} & \frac{\partial e_2(\bar{x})}{\partial X_3} & \frac{\partial e_2(\bar{x})}{\partial X_4} & \frac{\partial e_2(\bar{x})}{\partial X_5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial e_N(\bar{x})}{\partial X_1} & \frac{\partial e_N(\bar{x})}{\partial X_2} & \frac{\partial e_N(\bar{x})}{\partial X_3} & \frac{\partial e_N(\bar{x})}{\partial X_4} & \frac{\partial e_N(\bar{x})}{\partial X_5} \end{bmatrix}$$

– матриця Якобі.

Відповідно матриця Гессе буде такою:

$$H(\bar{x}) = J_a^T(\bar{x}) \cdot J_a(\bar{x}) + S_y(\bar{x}), \quad (16)$$

де  $S_y(\bar{x}) = \sum_{j=1}^N e_j(\bar{x}) H_j(\bar{x}),$

$$H_j(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_1 \partial X_3} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_1 \partial X_4} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_1 \partial X_5} \\ \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_2^2} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_2 \partial X_3} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_2 \partial X_4} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_2 \partial X_5} \\ \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_3 \partial X_1} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_3 \partial X_2} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_3^2} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_3 \partial X_4} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_3 \partial X_5} \\ \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_4 \partial X_1} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_4 \partial X_2} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_4 \partial X_3} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_4^2} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_4 \partial X_5} \\ \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_5 \partial X_1} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_5 \partial X_2} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_5 \partial X_3} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_5 \partial X_4} & \frac{\partial^2 e_j(\bar{x})}{\partial X_5^2} \end{bmatrix}.$$

Для достатньо “привабливого” початкового наближення, коли різниця між дійсним значенням параметра моделі  $x_i^{(d)}$  і його наближенням  $x_i^{(0)}$  невелика, складова  $J_a^T(\bar{x}) J_a(\bar{x})$  в (16) є домінуючою, і матриця Гессе

$$H(\bar{x}) = J_a^T(\bar{x}) J_a(\bar{x}) \quad (17)$$

виражається лише через перші похідні функції  $J(\bar{x})$  [3].

У випадку, коли найбільше значення нев’язки  $\max |e_j(\bar{x})|$  велике, переваги спеціальних методів над універсальними зсезають.

В загальному вигляді ітераційна процедура визначення параметрів нелінійної діагностичної (16) визначається співвідношенням [3, 4]

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \lambda_k \left( \left( J_a^T(\bar{x}_k^{(k)}) J_a(\bar{x}_k^{(k)}) \right) + g_k I \right)^{-1} \times \\ \times J_a^T(\bar{x}_k^{(k)}) \bar{e}(\bar{x}_k^{(k)}), \quad (18)$$

де  $\lambda_k$  і  $g_k$  – додатні константи, параметри алгоритму.

В тому випадку, коли  $\lambda_k = 1$  і  $g_k = 0$ , отримуємо алгоритм Гауса-Ньютона.

Якщо  $\lambda_k = 1$ , то алгоритм (18) носить назву алгоритму Левенберга-Марквардта [3].

Коли норма  $|S_y(\bar{x})|$  наближається до нуля, і матриця  $J_a(\bar{x})$  має повний стовпцевий ранг матриці, напрямок Гауса-Ньютона практично збігається з ньютонівським, що забезпечує високу збіжність алгоритму [3].

Задача значно ускладнюється, коли матриця  $J_a(\bar{x})$  має дефект рангу, тоді напрямок пошуку визначається неоднозначно. Альтернативою цьому є алгоритм Левенберга-Марквардта, в якому монотонне зменшення функції  $J(\bar{x})$  досягається за рахунок вибору “привабливих”  $\gamma_k$ . При  $\gamma_k = 0$  напрямок пошуку буде відповідати напрямку Гауса-Ньютона, а коли  $\gamma_k \rightarrow \infty$ , то напрямок пошуку гранично наближається до напрямку антиградієнта [3]. Отже, необхідний напрямок пошуку завжди можна забезпечити, вибираючи  $\gamma_k$  досить великим.

**3. Синтез алгоритму ідентифікації параметрів нелінійної діагностичної моделі**

“Прямолінійний” спосіб визначення параметрів моделі у відповідності з рекурентною процедурою (18) має один суттєвий недолік: оскільки число зумовленості матриці  $J_a^T(\bar{x})J_a(\bar{x})$  може бути значним навіть при непогано обумовленій матриці  $J_a(\bar{x})$ . Це пояснюється тим [3], що число обумовленості добутку матриць  $J_a^T(\bar{x})J_a(\bar{x})$  дорівнює квадрату числа обумовленості матриці  $J_a(\bar{x})$ .

Відомо, що погана обумовленість матриці  $J_a^T(\bar{x})J_a(\bar{x})$  призводить до некоректно поставленої задачі (15). Одним із ефективних способів зняття некоректності (регуляризації) задачі (15) є використання сингулярного розкладу матриці  $J_a(\bar{x})$ .

При використанні алгоритму Гаусса-Ньютона ітераційну процедуру (18) можна подати в такому вигляді:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \bar{P}_k, \quad (19)$$

де  $\bar{P}_k$  – вектор, який визначає напрямок пошуку.

Напрямок пошуку  $\bar{P}_k$  будемо шукати як розв’язок проміжної [3] задачі

$$\min: \frac{1}{2} |J_a(\bar{x})\bar{P} + \bar{e}(\bar{x})|^2. \quad (20)$$

Для розв’язку задачі (20) подамо матрицю  $J_a(\bar{x})$  через її сингулярний розклад [4, 5].

$$J_a(\bar{x}) = LRQ^T, \quad (21)$$

де:  $L$  і  $Q$  – квадратні ортогональні матриці розміром  $N \times N$  і  $K \times K$ ;

$K$  – кількість параметрів моделі (14);

$R$  – діагональна  $N \times K$  матриця, для якої  $r_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  і  $r_{ii} = r_i \geq 0$ ;

$r_i$  – сингулярні числа.

Розглянемо замість (20) тотожну їй задачу [3]

$$\min |J_a(\bar{\theta})\bar{P} + \bar{e}(\bar{\theta})|. \quad (22)$$

Нехай  $\bar{Z}_x = J_a(\bar{x})\bar{P} + \bar{e}(\bar{x})$ . Помножимо останнє рівняння на  $L^T$

$$L^T \bar{Z}_0 = L^T J_a(\bar{x})\bar{P} + L^T \bar{e}(\bar{x}).$$

Оскільки ортогональне перетворення вектора не змінює його довжини [7], то  $|L^T \bar{Z}_x| = |\bar{Z}_x|$  і  $|\bar{Z}_x| = |L^T J_a(\bar{x})\bar{P} + L^T \bar{e}(\bar{x})|$ .

В останньому виразі замінимо  $J_a(\bar{x})$  його сингулярним розкладом (21) і врахуємо ту обставину, що  $L^T L = I$ , де  $I$  – одинична матриця. Отже,  $|\bar{Z}_x| = |RQ^T \bar{P} + L^T \bar{e}(\bar{x})|$ .

Введемо такі вектори:  $\bar{y}_Q = Q^T \bar{P}$  і  $\bar{g}_L = L^T \bar{e}(\bar{x})$ . Тоді  $|\bar{Z}_x| = |R\bar{y}_Q + \bar{g}_L|$ .

Враховуючи тотожність задач (20) і (22), запишемо

$$\min: \frac{1}{2} |R\bar{y}_Q + \bar{g}_L|^2. \quad (23)$$

Тепер розв’язком задачі (23) буде вектор  $\bar{y}_Q$ , для знаходження якого величину, що знаходиться за знаком “min”, подамо у такому вигляді:

$$J(\bar{y}_Q) = \frac{1}{2} (R\bar{y}_Q + \bar{g}_L)^T (R\bar{y}_Q + \bar{g}_L).$$

Матрицю  $R$  і вектор  $\bar{g}_L$  розіб’ємо на два блоки:  $R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{g}_L = \begin{bmatrix} \bar{g}_{L,1} \\ \bar{g}_{L,2} \end{bmatrix}$ , де  $R_1$  – квадратна діагональна  $K \times K$  – матриця;  $\bar{g}_{L,1}$  –  $K$  – вимірний, а  $\bar{g}_{L,2}$  –  $N - K$  – вимірний вектори. Тоді

$$J(\bar{y}_Q) = \frac{1}{2} (\bar{y}_Q^T R_1^T R_1 \bar{y}_Q + 2\bar{g}_{L,1}^T R_1 \bar{y}_Q + \bar{g}_{L,1}^T \bar{g}_{L,1} + \bar{g}_{L,2}^T \bar{g}_{L,2}).$$

Із необхідних умов існування мінімуму функції  $J(\bar{y}_Q)$  за змінною  $\bar{y}_Q$  випливає

$$R_1 \bar{y}_Q + \bar{g}_{L,1} = 0,$$

що дає можливість знайти

$$\bar{y}_Q = -R_1^{-1} \bar{g}_{L,1}. \quad (24)$$

Напрямок пошуку  $\bar{P}$  знайдемо, враховуючи співвідношення  $\bar{y}_Q = Q^T \bar{P}$ . Помноживши останню рівність на матрицю  $Q$ , маємо

$$\bar{P} = Q\bar{y}_Q. \quad (25)$$

Отримані результати дають можливість синтезувати алгоритм обчислення параметрів нелінійної діагностичної моделі (14) з використанням методу Гаусса-Ньютона.

*Sp1.* Вибрати початкове наближення  $\bar{x}^{(0)}$  і перевірити умову зупину: якщо вона виконується, то  $\bar{x}^{(0)}$  буде розв’язком задачі; інакше — перейти до *Sp2*.

*Sp2.* Сформувати матрицю  $J_a(\bar{x}^{(k)})$ .

*Sp3.* Виконати сингулярний розклад матриці  $J_a(\bar{x}^{(k)})$  і знайти  $L^{(k)}$ ,  $Q^{(k)}$  і  $R^{(k)}$ .

*Sp4.* Обчислити вектор  $\bar{g}_{L,1}^{(k)}$  і матрицю  $R_1^{(k)}$ .

*Sp5.* Обчислити вектор  $\bar{y}_Q^{(k)}$  у відповідності з формулою (24) і визначити напрямок  $\bar{P}_k$ , використавши співвідношення (25).

*Sp6.* Виконати перехід із точки  $\bar{x}^{(k)}$  в точку  $\bar{x}^{(k+1)}$  згідно з формулою (19).

Sp7. Якщо правило зупину виконується, то розв'язком задачі (15) взяти вектор параметрів  $\bar{x}^{(k+1)}$ ; інакше замінити  $k$  на  $k+1$ ,  $\bar{x}^{(k)}$  на  $\bar{x}^{(k+1)}$  і перейти до Sp2.

Правило зупину визначимо із співвідношення (17) у відповідності з  $\nabla J(\bar{x}^{(k+1)}) \approx 0$ , коли  $\bar{e}(\bar{x}^{(k+1)}) \approx 0$ . Останню вимогу зручніше сформулювати у вигляді

$$|\bar{e}(\bar{x}^{(k+1)})| \leq \varepsilon_x,$$

де  $\varepsilon_x > 0$  – величина, що визначає точність розв'язку задачі.

Практична реалізація розробленого алгоритму засвідчила, що перехід від значення  $\bar{x}^{(k)}$  до значення  $\bar{x}^{(k+1)}$  доцільно здійснювати не у відповідності з (19), а, виходячи з такого правила:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \lambda_k \bar{p}_k,$$

де:  $\lambda_k$  – довжина кроку на  $k$ -ій ітерації;

$$\bar{p}_k = \frac{\bar{P}_k}{|\bar{P}_k|} \text{ – нормований напрямок кроку.}$$

Якість процедури вибору кроку в методі Гаусса-Ньютона оцінюється тим, яку зміну функції вона забезпечує на кожній ітерації. Зокрема, для збіжності алгоритму необхідно, щоб крок призводив до суттєвого зменшення функціонала (15). Цій вимозі можна задовольнити, якщо довжину кроку на кожній ітерації вибирати із умови мінімуму функціонала (15) за змінною  $\lambda$ , тобто:

$$\lambda_k = \min_{\lambda} : J(\bar{x}^{(k)} + \lambda \bar{p}_k). \quad (26)$$

Для розв'язку задачі (26) можна скористатись одним із числових методів, наприклад, методом золотого перерізу з квадратичною інтерполяцією.

Роботоздатність запропонованого алгоритму перевірена на промислових даних, які отримані в умовах експлуатації компресорного агрегату з нагнітачем РСЛ-804-2 у Богородчанському лінійному управлінні магістральних газопроводів. Результати роботи алгоритму відтворює рис. 1. Для оцінки точності апроксимації результатів експерименту діагностичною моделлю (14) обчислювалась величина

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\varepsilon(\bar{x}, \bar{u}^{(j)}) - E)^2}.$$

В умовах експериментального дослідження ця величина  $\hat{\sigma}_x = 0,0403$ . Отримана оцінка середньоквадратичного відхилення свідчить про задовільну апроксимацію експериментальних даних моделлю (14). Зауважимо, що дані про технологічні параметри, які характеризують роботу компресорного агрегату, взяті із журналу диспетчера, а дані про витрату фіксувались для всієї компресорної станції, яка має у своєму складі однотипні нагнітачі. Витрата через окремих нагнітач обчислювалась як середнє

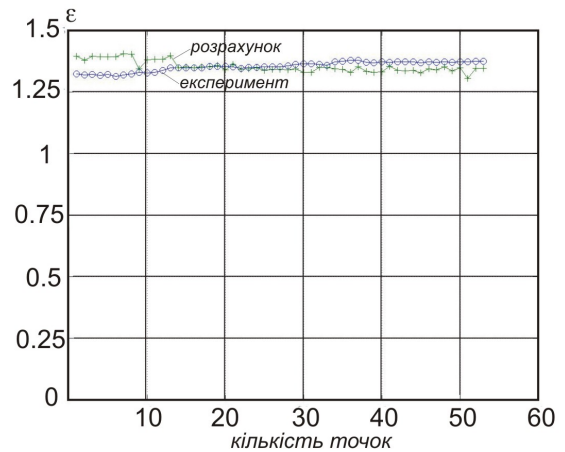


Рисунок 1 – Експериментальні і розрахункові значення ступеня стиску  $\varepsilon$  природного газу

арифметичне. Крім того, записи у журналі можуть мати суб'єктивні помилки. Тому точність апроксимації можна підвищити, якщо для збору інформації використовувати автоматизовану вимірвальну систему, яка включала б до свого складу пристрої вимірювання витрати через кожний нагнітач.

### Висновки

Для запропонованої моделі розроблений алгоритм ідентифікації діагностичних ознак, який апробований на промислових даних, що дало можливість встановити роботоздатність алгоритму ідентифікації. Подальші дослідження слід проводити в напрямку розробки способу і алгоритмів розпізнавання технічного стану компресорного агрегату на основі ідентифікації параметрів діагностичної моделі.

### Література

- 1 Трубопровідний транспорт газу. Монографія / М.П.Ковалко, В.Я.Грудз, В.Б.Михалків, Д.Ф.Тимків, Л.С.Шлапак, О.М.Ковалко. – К.: Арена Еко, 2002. – 600 с.
- 2 Горбійчук М.І., Когутяк М.І., Скріпка О.А. Діагностична модель відцентрового нагнітача природного газу // Науковий вісник Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.
- 3 Гилл Ф., Мюррей У. Практическая оптимизация / Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 509 с.
- 4 Ермаков С.М., Жигляевский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента. – М.: Наука, 1987.- 280 с.
- 5 Горбійчук М.І. Моделювання об'єктів і систем керування в нафтовій та газовій промисловості: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: ІФДТУНГ, 1999. – 603 с.
- 6 Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов / Пер. с англ. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
- 7 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для инженеров и научных работников / Пер. с англ. – М.: Мир, 1970. – 720 с.