

530.145
Ф64

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

ФІГЬО
Тарас Володимирович

УДК 530.145.61 (043)
Ф64

**НОВІ ТОЧНО ТА КВАЗИ-ТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНІ
КВАНТОВІ СИСТЕМИ**

01.04.02 — теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ — 2006

Дисертацію є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
Ткачук Володимир Михайлович,
кафедра теоретичної фізики

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Ситенко Юрій Олексійович,
завідувач відділу теорії ядра і квантової теорії поля
Інституту теоретичної фізики імені
М. М. Боголюбова НАН України;



доктор фізико-математичних наук, професор
Ваврух Маркіян Васильович,
завідувач кафедри астрофізики Львівського
національного університету імені Івана Франка.

Провідна установа:

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Захист ві
спеціалі
університ
Мефодія,

му
ла і

З дисерта
університ

ного
оманова 5

Авторефе

Вчений с
спеціалі
доктор фі

3.



an1158

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. На початку ХХ століття виникли дві нові галузі фізики, які кардинально поміняли науковий світогляд вчених: теорія відносності та квантова механіка. Остання з них бурхливо розвивається ще й дотепер. Постійно виникають нові відгалуження та напрямки досліджень: квантові обчислення та квантова інформатика, квантова механіка з деформованою алгеброю Гайзенберга, неермітові та комплексні системи.

Досьогодні не знайдено ще жодного прикладу фізичної системи, для якої б не виконувалися закони та постулати квантової механіки. З цієї точки зору квантова механіка — найуспішніша фізична теорія. З іншого боку, принципи квантової механіки суперечать нашому повсякденному досвіду і, як наслідок, її важко зрозуміти на інтуїтивному рівні. Тому, як і для будь-якої іншої теорії, аналіз та розгляд простих квазі-точно та точно розв'язуваних задач є важливими для глибокого розуміння квантової механіки. Як писав Дірак [Dirac P. A. M. Proc. Roy. Soc. London A.— 1942. V. 180.— P. 140]: “Квантова механіка Гайзенберга і Шрьодінгера спочатку була розроблена для кількох простих прикладів, на основі яких була сконструйована загальна математична схема. Опісля науковці усвідомили загальні фізичні принципи, які визначають інтерпретацію [квантової механіки], як от принцип суперпозиції станів та принцип невизначеності.”

Точно розв'язувані задачі — це задачі, для яких можна знайти всі енергетичні рівні та відповідні хвильові функції в явному вигляді. Було розроблено декілька методів для знаходження точно розв'язуваних гамільтоніанів. Зокрема методи факторизації (Шрьодінгер, 1940; Інфельд та Хіл, 1951), суперсиметрії (Ніколаї, 1976; Вітен, 1981; Генденштейн, 1983). Квазі-точно розв'язувані задачі — задачі, для яких можна знайти кілька енергетичних рівнів та відповідні хвильові функції в явному вигляді (перші приклади з'явилися у роботах кінця 70, початку 80 років минулого століття: Флесас, Разаві, Кхаре та інші). Клас квазі-точно розв'язуваних гамільтоніанів є набагато ширшим. Знаходження нових точно та квазі-точно розв'язуваних задач — важлива та складна проблема.

Методи побудови точно та квазі-точно розв'язуваних задач можна застосовувати до нових областей квантової механіки. Одним з таких нових напрямків квантової механіки є неермітові гамільтоніани. Вперше їх запропонував використовувати Паулі ще у 1943 році. Неермітові гамільтоніани почали інтенсивно вивчати після робіт Бендера та колег (1998–1999 роки). Неермітові системи застосовують як ефективні гамільтоніани в оптиці (Келер та співробітники, 1997; Бері та О'Дел, 1998), для

опису еволюції нерівноважних систем у статистичній фізиці (Гатано, 1996). Інтерпретація неермітових гамільтоніанів викликає певні труднощі і нині такі системи та їхні властивості інтенсивно досліджуються.

Останнім часом інтенсивно досліджуються квантові системи з деформованою алгеброю Гайзенберга. Перша робота, в якій розглядалася модифікація канонічних комутаційних співвідношень, була опублікована ще у 1947 році Снайдером. Зацікавленість цією проблемою було відновлено наприкінці минулого століття дослідженнями в теорії струн (Грос і Менде, 1988) та квантовій теорії чорних дір (Маджіоре, 1993), які передбачали існування ненульової мінімальної невизначеності координат. Кемпфом у 1993–1995 роках було показано, що мінімальна невизначеність координати може природно з'явитися у квантовій механіці шляхом незначної зміни (деформації) канонічних комутаційних співвідношень (алгебри Гайзенберга). Саме роботи Кемпфа стимулювали дослідження традиційних квантово-механічних задач у просторах з мінімальною невизначеністю координати. Ці задачі дають змогу виявити вплив квантування простору на спектри та хвильові функції квантових систем.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та згідно держбюджетних тем Фф-39Б “Нелінійні флюктуації в квантових рідинах” (номер державної реєстрації № 0100U001447), Фф-150Ф “Розробка нових математичних методів дослідження квантових систем” (номер державної реєстрації № 0100U001446) та Фф-55Ф “Теоретичні дослідження нових квантових систем” (номер державної реєстрації № 0106U001293).

Мета і задачі дослідження. Головною метою дисертаційної роботи є виявлення нових квазі та точно-розв'язуваних задач квантової механіки. При цьому значну увагу приділено вивченню нових напрямів квантової механіки. Зокрема, досліджувалися спектральні властивості неермітових гамільтоніанів, а також вивчалися властивості одновимірних квантових систем у фазовому просторі з деформованою алгеброю Гайзенберга. Також досліджувалися багатовимірні квазі-точно розв'язувані гамільтоніани.

Таким чином, *об'єктом дослідження* є точно та квазі-точно розв'язувані задачі квантової механіки, а *предметом дослідження* виступають спектри гамільтоніанів та їхні власні функції. Для дослідження використовувалися методи суперсиметрії, факторизації, форм-інваріантності та інверсний метод.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі вперше

знайдено загальний вигляд суперпотенціалу для PT -симетричного гамільтоніану. Побудовано новий клас неермітових операторів, які мають дійсний спектр і які є квазі-точно розв'язуваними.

Узагальнено інверсний метод для отримання квазі-точно розв'язуваних багатовимірних потенціалів з двома відомими рівнями. Його також поширено для побудови квазі-точно розв'язуваного нестационарного рівняння Шрьодінгера.

Розвинуто квазі класичне наближення (метод ВКБ) і вперше узагальнено правило квантування Бора-Зомерфельда на випадок одновимірного квантового простору з деформованим комутаційним співвідношенням, яке передбачає існування мінімальної довжини.

Вперше знайдено спектр одновимірної кулонівської задачі у деформованому просторі з мінімальною довжиною. На прикладі цієї задачі показано, що наявність мінімальної довжини необов'язково приводить до усунення сингулярностей.

Практичне значення одержаних результатів. Результати, представлені в дисертації, мають самостійний інтерес, а також можуть бути використані у подальших теоретичних та експериментальних дослідженнях.

Так, наприклад, для деформованого простору з мінімальною довжиною розроблено новий наближений метод знаходження спектрів — правило квантування Бора-Зомерфельда, яке можна застосувати до широкого класу гамільтоніанів. Спектр кулонівської системи може бути використаний для оцінки можливої величини мінімальної невизначеності координат простору. Результати третього розділу можуть бути використані для простого, а тому швидкого, розрахунку пасток Пауля.

Особистий внесок здобувача. Постановку задач дослідження здійснено науковим керівником проф. В. М. Ткачуком. Всі викладені в дисертації оригінальні результати отримано автором самостійно або при його безпосередній участі. У роботах, виконаних зі співавторами, здобувачу належить:

- побудова та частковий аналіз прикладів, які ілюструють теоретичні положення відповідних статей [1, 3, 4, 6];
- два вигляди генеруючої функції (формули (3.10) та (3.19) дисертації), для яких можна побудувати квазі-точно розв'язувані багатовимірні гамільтоніани з двома відомими рівнями [3];
- аналіз дійсності побудованого потенціалу та квадратичної інтегрованості хвильової функції [4];
- розрахунок енергетичного спектру кулонівського потенціалу у деформованому просторі з мінімальною довжиною [5].

Також значна частина математичних розрахунків статті [5] та розклад кінетичної енергії за степенями \hbar при дослідженні квазікласичного наближення для деформованого простору у [6] робилися всіма трьома співавторами незалежно один від одного.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, включених до дисертаційної роботи, були представлені автором особисто на таких конференціях і семінарах: Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2002 рік (Львів, 2003); Еврика-2003 (Львів, 2003) [7]; ІЕФ-2003 (Ужгород, 2003) [8]; Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2003 рік (Львів, 2004); Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2004 рік (Львів, 2005); Еврика-2005 (Львів, 2005) [9]; 6 International Conference: SNMP—05 (Kyiv, 2005) [10].

Результати, викладені у роботі, також неодноразово обговорювалися на семінарах кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка.

Публікації. Матеріали дисертації опубліковано у 6 статтях у фахових виданнях, визначених переліком ВАК України, та 4 тезах доповідей на конференціях.

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Обсяг дисертації становить 134 сторінки, включно зі списком використаних джерел, що містить 150 найменувань. Результати роботи проілюстровано на 9 рисунках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі викладено обґрунтування актуальності досліджень, що становлять зміст дисертації, висвітлено новизну отриманих результатів, подано зв'язок досліджень із науковими темами, у роботі над якими брав участь автор, окреслено мету роботи.

У першому розділі зроблено огляд методів побудови квазі-точно та точно розв'язуваних задач. Всі описані методи використовувалися в дисертаційному дослідженні, а це: суперсиметричний метод, метод точкових перетворень, перетворення Дарбу, інверсний метод. Суть перелічених методів проілюстровано на прикладі одновимірного стаціонарного рівняння Шрьодінгера. Також зроблено посилання на джерела, де ці методи застосували до вивчення нестационарних, багатовимірних чи неермітових систем.

У другому розділі вивчалася квантова механіка з неермітовими гамільтоніанами. На початку розділу зроблено короткий огляд робіт, в яких вивчалися такі системи. Особливу увагу звернено на застосування неермітових гамільтоніанів до опису фізичних систем.

Бендер та співробітники (праці кінця 1990-х років) за допомогою числових розрахунків показали, що спектр гамільтоніану

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - (ix)^\epsilon \quad (1)$$

дійсний, якщо $\epsilon \geq 2$. Було висловлено припущення, що причиною дійсності спектру є PT -симетрія. Оператор H називають PT -симетричним, якщо

$$PTH = HPT,$$

де P — оператор просторового відображення: $Pf(x) = f(-x)$, T — оператор комплексного спряження: $Tf(x) = f^*(x)$. Оскільки кінетична енергія — PT -симетричний оператор, то умова PT -симетричності гамільтоніану зводиться до $V(x) = V^*(-x)$.

Зважаючи на дійсність спектру гамільтоніану (1), як і багатьох інших PT -симетричних, відомих на початок 2000-х років, гамільтоніанів, постало запитання: чи кожен PT -симетричний гамільтоніан має дійсний спектр? Щоб відповісти на нього ми застосували техніку факторизації [1]. Гамільтоніан

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (2)$$

називають факторизованим, якщо його вдається виразити у вигляді

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{d}{dx} + W \right) \left(\frac{d}{dx} + W \right) + \epsilon = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} (W^2 + W') + \epsilon. \quad (3)$$

Факторизація гамільтоніану (3) з рівняння $\left(\frac{d}{dx} + W \right) \psi_\epsilon = 0$ дає змогу знайти одну

власну функцію $\psi_\epsilon = Ce^{-\int W dx}$ гамільтоніану (2), якій відповідає енергія ϵ . Умова PT -симетричності при застосуванні до виразу (3) приводить до рівняння на суперпотенціал W :

$$\left(W^2(-x) + W'(-x) + 2\epsilon \right)^* = W^2(x) - W'(x) + 2\epsilon,$$

яке не розв'язується безпосередньо. Вводячи PT -симетричну $U_+(x) = W(x) + W^*(-x)$ та анти- PT -симетричну функцію $U_-(x) = W(x) - W^*(-x)$, попереднє рівняння вдається переписати у більш зручному вигляді.

$$U'_+ = U_+ U_- + 2(\epsilon - \epsilon^*).$$

З цього рівняння легко знайти $U_-(x)$, а значить, і суперпотенціал $W(x)$, для кожної фіксованої функції $U_+(x)$, яка відіграє роль генеруючої функції:

$$W(x) = \frac{1}{2} \left(U_+(x) + \frac{U_+'(x) - 2(\varepsilon - \varepsilon^*)}{U_+(x)} \right).$$

Отриманий вираз є ключовим у відповіді на вище поставлене запитання про дійсність спектру PT -симетричних гамільтоніанів. Генеруючу функцію $U_+(x)$ підбирають таким чином, щоб отриманий суперпотенціал $W(x)$, а значить, і потенціальна енергія $V(x) = \frac{1}{2}(W^2 - W')$, були регулярними функціями. Друга умова, яка накладається на генеруючу функцію — квадратична інтегровність власної функції ψ_ε .

У дисертаційній роботі для ілюстрації методу наведено кілька прикладів. Один з них задано такою генеруючою функцією

$$U_+(x) = \frac{i\alpha}{(x + ia)^n},$$

де n непарне натуральне число, α , a — додатні сталі. Такий вибір веде до

$$W = \frac{i\alpha}{2(x + ia)^n} - \frac{n}{2(x + ia)} - 2 \frac{\text{Im}\varepsilon}{\alpha} (x + ia)^n,$$

$$V = \text{Re}\varepsilon - \frac{\alpha^2}{8(x + ia)^{2n}} + 2 \left(\frac{\text{Im}\varepsilon}{\alpha} \right)^2 (x + ia)^{2n} + \frac{n^2 - 2n}{8(x + ia)^2} + 2 \frac{n \text{Im}\varepsilon}{\alpha} (x + ia)^{n-1}.$$

При $n > 1$ хвильова функція записується так:

$$\psi_\varepsilon = C(x + ia)^{n/2} \exp \left(\frac{i\alpha}{2(n-1)(x + ia)^{n-1}} + 2 \frac{\text{Im}\varepsilon}{\alpha} \frac{(x + ia)^{n+1}}{n+1} \right).$$

Для $n = 1$ цей вираз виглядає так:

$$\psi_\varepsilon = C(x + ia)^{(1-i\alpha)/2} \exp \left(\frac{\text{Im}\varepsilon}{\alpha} (x + ia)^2 \right).$$

Для квадратичної інтегровності для довільного n слід вимагати, щоб $\frac{\text{Im}\varepsilon}{\alpha} < 0$.

Отже, бачимо, що не кожен PT -симетричний гамільтоніан має дійсний спектр.

Тому постає нове запитання: *для яких класів неермітових гамільтоніанів спектр дійсний*. Відомо декілька методів отримання неермітових гамільтоніанів з дійсними спектрами. Вони описані у дисертації.

Оператор H називається η -псевдоермітовим, якщо

$$H^\dagger \eta = \eta H. \quad (4)$$

Мостафазадех у серії статей 2002 року показав, що кожен неермітовий гамільтоніан з дійсним спектром псевдоермітовий. Тому ми працювали з псевдоермітовими операторами. З аналізу $\int \psi^\dagger \eta H \psi dx$ випливає, що власній функції ψ відповідає дійсне власне значення E за винятком випадку, коли $\int \psi^\dagger \eta \psi dx = 0$. Щоб спростити аналіз, ми вибирали $\eta = O^\dagger O$, це також гарантує ермітовість оператора η . До того ж,

$\int \psi^* O^1 \psi dx = 0$ тільки тоді, коли $O\psi = 0$. Вибираючи

$$O = \frac{d}{dx} + f + ig$$

і використовуючи умову псевдоермітовості (4), приходимо до

$$f^2 - f' = \frac{2gg'' - g'^2 + \alpha}{4g^2}, \quad \text{Im}V = -2g', \quad \text{Re}V = f^2 - f' - g^2 + \beta,$$

де α, H — дійсні сталі інтегрування. Функція g відіграє роль генеруючої функції.

Якщо функція $Ce^{-\int(f+ig)dx}$, яка належить до ядра оператора O , є водночас власною функцією гамільтоніану H , то можна бачити, що $(\text{Im}E)^2 = \alpha$. При $\alpha < 0$ це суперечлива умова, звідки випливає, що спектр гамільтоніана повністю дійсний. При $\alpha = 0$ спектр гамільтоніану дійсний, і ми знаємо його одну власну функцію.

При $\alpha > 0$ потрібно перевірити чи функція $Ce^{-\int(f+ig)dx}$ квадратично інтегровна. Якщо так, то гамільтоніан H містить одне комплексне власне значення. В іншому випадку його спектр повністю дійсний.

Як один із прикладів ми аналізували випадок з генеруючою функцією $g = e^{-x^2}$.

Відповідний гамільтоніан такий:

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{\alpha}{4}e^{2x^2} - e^{-2x^2} - 4ixe^{-x^2} + \beta - 1.$$

При $\alpha > 0$ відповідна власна функція не є нормованою. При $\alpha = 0$ функція

$\psi = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{\frac{x^2}{2} - i\int e^{-x^2} dx}$ — нормована, гамільтоніан стає квазі-точно розв'язуваним з одним відомим рівнем. Отже, спектр наведеного гамільтоніану є повністю дійсним для довільних значень параметру α .

У **третьому розділі** ми застосуємо інверсний метод, запропонований Ушверідзе, до побудови багатовимірних квазі-точно розв'язуваних рівнянь Шрьодінгера. Ми досліджували багатовимірне стаціонарне рівняння Шрьодінгера та одновимірне нестаціонарне рівняння Шрьодінгера.

Стаціонарне рівняння в n -вимірному просторі має вигляд:

$$H\psi = \left(-\frac{1}{2}\Delta + V \right) \psi = E\psi.$$

Вибираючи власну функцію основного стану у вигляді $\psi_0 = e^{-F}$, а збудженого — $\psi_1 = \phi e^{-F}$ і, вимагаючи, щоб ці функції були власними функціями того самого гамільтоніану $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$, ми отримали рівняння

$$2(\bar{\nabla}F, \bar{\nabla}\phi) = \Delta\phi + 2\varepsilon\phi, \quad (5)$$

де $\varepsilon = E_1 - E_0$ — різниця між відповідними власними значеннями. Це рівняння

другого порядку в часткових похідних відносно ϕ , та першого відносно F . Тому ϕ зручно використовувати як генеруючу функцію.

Щоб спростити аналіз рівняння (5), функцію F ми представили як суму $f + \tilde{f}$, тут f — довільний частковий розв'язок (5), а \tilde{f} — загальний розв'язок однорідного рівняння $(\nabla\tilde{f}, \nabla\phi) = 0$. Але навіть це однорідне рівняння не можна розв'язати в загальному випадку для всіх ϕ . Нам вдалося його розв'язати (і водночас знайти частковий розв'язок f) для двох часткових виглядів генеруючої функції ϕ .

Випадок 1.

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_i),$$

де функції ϕ_i залежать лише від однієї змінної. В цьому випадку частковий розв'язок $f = \sum f_i(x_i)$; функції f_i задовольняють $\frac{df_i}{dx_i} = \frac{\phi_i'' + 2\varepsilon\phi_i + \lambda_i}{2\phi_i'}$, де на сталі λ_i накладається умова $\sum \lambda_i = 0$. Наявність сталих λ_i дає більшу свободу у виборі генеруючої функції: тобто маємо змогу уникнути сингулярностей в f_i .

Розв'язок однорідного рівняння можемо записати так:

$$\tilde{f} = \tilde{f}(\chi_1(x_1) - \chi_2(x_2), \chi_1(x_1) - \chi_3(x_3), \dots, \chi_1(x_1) - \chi_n(x_n)),$$

де \tilde{f} довільна функція від $n-1$ аргументів, а $\chi_i(x) = \int_{\phi_i'(y)}^x \frac{dy}{\phi_i'(y)}$. Таким чином,

загальний вираз для F набуває такої форми:

$$F = \sum_{i=1}^n \int_{\phi_i'(x)}^x \frac{\phi_i''(x) + 2\varepsilon\phi_i(x) + \lambda_i}{2\phi_i'(x)} dx + \tilde{f}(\chi_1(x_1) - \chi_2(x_2), \chi_1(x_1) - \chi_3(x_3), \dots, \chi_1(x_1) - \chi_n(x_n)).$$

Випадок 2.

$$\phi = \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i)$$

У цьому випадку загальний вираз для F виглядає так:

$$F = \sum_{i=1}^n \int_{\phi_i'(x)}^x \frac{\phi_i''(x) + (2\varepsilon/n + \lambda_i)\phi_i(x)}{2\phi_i'(x)} dx + \tilde{f}(\chi_1(x_1) - \chi_2(x_2), \dots, \chi_1(x_1) - \chi_n(x_n)),$$

де $\chi_i(x) = \int_{\phi_i'(y)}^x \frac{dy}{\phi_i'(y)}$, \tilde{f} — довільна функція від $n-1$ аргументів.

У дисертаційній роботі також наведено та проаналізовано два приклади, які ілюструють ці випадки. В обох випадках ϕ та \tilde{f} вибираємо так, щоб гарантувати квадратичну інтегровність обох власних функцій. Також зазначимо, що можна вибрати $\tilde{f} \equiv 0$, але в цьому випадку у вихідному рівнянні змінні розділяються.

Щоб побудувати квазі-точно розв'язуване нестационарне рівняння Шрьодінгера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V(x, t)\psi \quad (6)$$

з одним відомим розв'язком, ми зробили такий анзац $\psi = e^{-f(x,t) - ig(x,t)}$. Вибір функцій f та g у несингулярному вигляді гарантує несингулярність потенціалу V . Умова дійсності потенціалу з рівняння (6) приводить до

$$f_t + g_{xx} = 2f_x g_x.$$

Останнє рівняння легко розв'язуємо відносно функції g :

$$g(x, t) = c_1(t) \int_{-\infty}^x e^{2f(y,t)} dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{2f(y,t)} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^y e^{-2f(z,t)} dz dy + c_2(t).$$

$c_1(t)$, $c_2(t)$ довільні дійсні функції. З аналізу ермітовості оператора імпульсу (а значить, і оператора кінетичної енергії) на множині функцій, яка містить розв'язок ψ , випливає, що $c_1(t)$ має бути тотожним нулем, а інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2f(z,t)} dz$ не має залежати від часу. Для забезпечення цієї умови ми вибирали довільну функцію

$\tilde{f}(x, t)$ таку, що $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tilde{f}(z,t)} dz$ існує для будь-якого моменту часу і тоді вибір

$$f(x, t) = \tilde{f}(x, t) + \frac{1}{2} \ln F(t)$$

забезпечував незалежність $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2f(z,t)} dz$ від часу, а також гарантував рівність норми хвильової функції ψ одиниці. Знаючи f , легко можна знайти функцію g та потенціал $V = g_t + f_x^2 - g_x^2 - f_{xx}$.

Функція g знаходиться в замкнутій формі, якщо $\tilde{f}(x, t) = \tilde{f}(a(t)x + b(t))$, цей випадок був докладно проаналізований. Для ілюстрації методу нами було знайдено та проаналізовано три приклади квазі-точно розв'язуваних нестационарних рівнянь Шрьодінгера. Особливо хотілося б відмітити *Приклад 2*, в якому відтворювався квантовий ефект Капіці.

У **четвертому розділі** ми розглядали одновимірні квантові системи з деформованою алгеброю Гайзенберга, тобто алгеброю, в якій комутатор між операторами координати та імпульсу не дорівнює $i\hbar$. У вступі до розділу наведені підстави для модифікації канонічного комутаційного співвідношення, а також на основі наявної літератури проаналізовано наслідки його модифікації.

У 1993–1995 роках Кемпф та колеги деформував канонічне комутаційне

співвідношення так:

$$[X, P] = i\hbar(1 + \beta P^2), \quad (7)$$

проаналізував його та показав, що така деформація призводить до наявності мінімальної довжини. Тобто, для довільного фізично прийнятного стану середнє квадратичне відхилення координати $\Delta X \geq \Delta X_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$.

У роботі докладно досліджено механізми, які приводять до виникнення мінімальної довжини та було наведено дві нові деформовані алгебри, для яких виникає нове явище, а саме обмеженість оператора імпульсу зверху. Це такі алгебри:

$$[X, P] = i\hbar(1 + \alpha X^4 + \beta P^2), \quad [th\alpha X, P] = i\hbar\left(\frac{\alpha}{ch^2\alpha X} + \beta P^2 + \delta\right).$$

Тут α , β , δ — додатні сталі. При $\alpha = \beta = 0$ для першої алгебри та при $\beta = \delta = 0$ для другої отримується недеформоване комутаційне співвідношення.

Для першої з них виконуються такі нерівності:

$$\frac{4}{\alpha\beta\hbar^2} \geq \langle X^2 \rangle \geq \Delta X^2 \geq \hbar^2\beta, \quad \frac{16}{\hbar^4\alpha\beta^3} \geq \langle P^2 \rangle \geq \Delta P^2 \geq \hbar^2\frac{4}{9}\sqrt{3\alpha}.$$

А для другої такі:

$$\langle X^2 \rangle \geq \Delta X^2 \geq \hbar^2\frac{\beta\hbar}{\alpha^2}, \quad \frac{4}{\hbar^2\beta^2} \geq \langle P^2 \rangle \geq \Delta P^2 \geq \frac{1}{4}\hbar^2\delta^2.$$

Для другої з цих алгебр ми також показали, що спектр гамільтоніану типу Розена-Морзе $P^2 - \frac{A}{ch^2\alpha X}$ може бути знайдено аналітичним чином за допомогою методів суперсиметрії та формінваріантності. Отримані результати наведено в дисертаційній роботі.

Наявність мінімальної довжини в деформованій алгебрі Кемпфа (7) має два прямих наслідки: 1) оператор координати не має власних функцій; 2) можуть усуватися розбіжності, пов'язані з сингулярностями потенціалу. Відсутність власних значень оператора координати приводить до відсутності координатного представлення. Модифікація канонічного комутаційного співвідношення ускладнює знаходження точних розв'язків і на 2005 рік було відомо лише спектр для гармонічного осцилятора (D -вимірною нерелятивістського та релятивістського).

Тому цікаво *знайти і дослідити точно розв'язувану задачу зі сингулярним потенціалом*. Такою задачею виявилася одновимірна Кулонівська задача з наступним гамільтоніаном

$$H = P^2 - \frac{\alpha}{X}. \quad (8)$$

Оскільки координатне представлення відсутнє, то ми розв'язували задачу в імпульсному представленні, в якому оператори імпульсу та координати записуються

так:

$$P = p, \quad X = i(1 + \beta p^2) \frac{d}{dp}.$$

Дію оператора $\frac{1}{X}$ нами було запропоновано визначити так:

$$\frac{1}{X} \Psi(p) = -i \int_{-\infty}^p \frac{\Psi(q)}{1 + \beta q^2} dq + c[\Psi],$$

де $c[\Psi]$ стала, яка залежить від стану Ψ . При заданих таким чином операторах рівняння на власні значення, яке відповідає гамільтоніану (8), має такі власні функції

$$\Psi_E(p) = \frac{C_E}{p^2 - E} \exp \left[\frac{-i\alpha}{1 + \beta E} \left(\frac{1}{\sqrt{-E}} \arctg \frac{p}{\sqrt{-E}} - \sqrt{\beta} \arctg \sqrt{\beta} p \right) \right],$$

які є нормованими для від'ємних значень енергій E ; тут C_E — константа нормування. Щоб визначити спектр гамільтоніану, ми скористалися вимогою ермітовості гамільтоніана (8) на множині власних функцій. Ця умова еквівалентна до

$$\left\langle \frac{1}{X} \Psi_{E_i} \middle| \Psi_{E_j} \right\rangle = \left\langle \Psi_{E_i} \middle| \frac{1}{X} \Psi_{E_j} \right\rangle,$$

Ψ_{E_i}, Ψ_{E_j} — власні функції. Останнє співвідношення накладає обмеження на множину власних значень. Якщо зафіксувати певне власне значення E_0 , то на решту накладається умова

$$\frac{\alpha}{2(\sqrt{-E} - E\sqrt{\beta})} = \delta + n,$$

де значення параметра $0 \leq \delta < 1$ залежить від значення E_0 , а n — ціле невід'ємне число, відіграє роль квантового числа.

Отже,

$$E_n = -\frac{1}{4\beta} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{n+\delta} \sqrt{\beta}} \right)^2 \approx -\frac{\alpha^2}{4(n+\delta)^2} + \frac{\alpha^3}{4(n+\delta)^3} \sqrt{\beta} - \frac{5\alpha^4}{16(n+\delta)^4} \beta + \dots \quad (9)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ При $\beta \rightarrow 0$ отримані результати (спектр і хвильові функції) співпадають з недеформованим випадком. Відмітимо дві особливості отриманого результату.

1) перша поправка до спектру пропорційна до $\sqrt{\beta}$. У всіх попередньо відомих результатах (гармонічний осцилятор, атом водню) ця поправка пропорційна до β . Пропорційність поправки до $\sqrt{\beta}$ дає кращу експериментальну можливість виявити відмінність β від 0.

2) наявність різних спектральних сімейств, які задаються параметром δ , з математичної точки зору означає, що існують різні ермітові розширення оператора

$\frac{1}{X}$. З фізичної точки зору, на нашу думку, це означає можливість апроксимувати сингулярний потенціал різними регулярними, і як наслідок, отримати різні спектри. Отже, існування мінімальної довжини не усуває сингулярності потенціалу $-\frac{1}{X}$.

Для верифікації отриманих результатів ми застосували наближений метод квантування Бора-Зомерфельда. Його застосування дало такий самий результат, як і формула (9). Тому постало питання про строге обґрунтування використання квазі-класичного наближення та області його застосування в просторі з деформованим комутаційним співвідношенням.

Для побудови квазі-класичного наближення ми використовували більш загальний вигляд деформованого комутаційного співвідношення:

$$[X, P] = i\hbar f(P),$$

де $f(P)$ — довільна парна всюди додатна функція і так зване квазі-координатне представлення

$$X = x, P = P(p), p = -i\hbar \frac{d}{dx}; \quad \frac{dP(p)}{dp} = f(P).$$

Потрібно знайти власні функції з рівняння на власні значення

$$\left(\frac{P^2}{2m} + U(x) \right) \psi(x) = E\psi(x).$$

Якщо записати власну функцію ψ за допомогою функції дії $\psi = e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}$, то дія кінетичної енергії в лінійному наближенні по \hbar набуває вигляду

$$\frac{P^2}{2m} \psi(x) = \left[P^2(S'(x)) - \frac{i\hbar}{2} \left[P^2(S'(x)) \right]'' S''(x) + \dots \right] \psi(x).$$

Розкладавши функцію дії по степенях \hbar , послідовно проінтегрувавши відповідні диференціальні рівняння, ми знайшли, що хвильова функція в лінійному наближенні по \hbar набуває такого вигляду:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{|Pf(P)|}} \left(C_1 \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int^x p dx \right] + C_2 \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int^x p dx \right] \right),$$

де $P = \sqrt{2m(E - U(x))}$, $p = p(P)$ обернена функція до $P(p)$. Умова зшивання дає "звичайне" правило квантування Бора-Зомерфельда для канонічно спряжених змінних $\int_{x_1}^{x_2} p dx = \pi(n + \delta)$. Тут x_1, x_2 — класичні точки повороту. Для гладкої

функції потенціальної енергії та за умови $f(0) \neq 0$ параметр $\delta = \frac{1}{2}$. При переході до вихідних операторів X та P це правило виглядає так

$$-\oint \frac{XdP}{f(P)} = 2\pi(n + \delta), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Аналіз застосовності квазі-класичного наближення показав, що воно застосовне, якщо виконується

$$P^2 \gg \hbar \left| \frac{d}{dx} P f(P) \right|.$$

При виборі функції деформації $f(P) = 1 + \beta P^2$, що відповідає деформації Кемпфа (7), дана нерівність спрощується до

$$a \gg \lambda \gg \frac{\Delta X_{\min}^2}{a},$$

де a — характерний розмір системи, λ величина хвилі де Бройля, пов'язаної з імпульсом P . Зазначимо, що друга нерівність виникає тільки в деформованому випадку і показує, що квазі-класичне наближення може перестати бути застосовним для дуже великих значень квантових чисел.

Нами було перевірено застосовність правила квантування Бора-Зомерфельда для кількох задач, для яких були відомі точні та наближені розв'язки. Це були одновимірні гармонічний осцилятор та потенціальна яма. Для першої задачі різниця між точним та наближеним результатом становила $\frac{\beta}{4} + O(\beta^2)$, а для другої співпадіння було повним.

На прикладі тривимірних ізотропного гармонічного осцилятора та атома водню, ми показали, що виведене правило квантування Бора-Зомерфельда можна застосовувати до тривимірних задач з радіальною симетрією. У цьому випадку ми розглядали таку деформовану алгебру

$$[X_i, P_j] = i\hbar \left((1 + \beta P^2) \delta_{ij} + \beta' P_i P_j \right).$$

Отримані результати добре узгоджувалися з уже відомими.

Завершується дисертаційна робота **Висновками** та **Списком використаних джерел**.

Основні результати та висновки дисертації можна викласти у вигляді таких тверджень:

- Знайдено загальний вигляд для суперпотенціалу PT -симетричного гамільтоніану Шрьодінгера. Завдяки цьому побудовано зручний метод факторизації PT -симетричних гамільтоніанів, що дало змогу знайти один рівень таких гамільтоніанів.
- Ґрунтуючись на властивостях псевдоермітових операторів запропоновано

новий підхід до побудови неермітових гамільтоніанів з дійсним спектром. Отримані гамільтоніани характеризуються дійсним параметром α . При $\alpha \geq 0$ побудовані таким чином гамільтоніани — квазі-точно розв'язувані.

- Задачу про побудову багатовимірного квазі-точно розв'язуваного потенціалу з двома відомими рівнями було зведено до розв'язування неоднорідного лінійного рівняння першого порядку в часткових похідних. Це рівняння розв'язано для двох часткових виглядів генеруючої функції.
- Запропоновано метод побудови квазі-точно розв'язуваних нестационарних рівнянь Шрьодінгера з одним відомим розв'язком.
- Уперше точно розв'язано одновимірну кулонівську задачу у деформованому просторі з мінімальною довжиною. На прикладі цього гамільтоніану показано, що наявність деформації, яка приводить до існування мінімальної невизначеності координати, необов'язково усуває проблеми пов'язані зі сингулярністю потенціалу.
- Уперше узагальнено квазі-класичне наближення на випадок одновимірного деформованого простору з мінімальною довжиною. Проаналізовано його застосовність. Знайдено правило квантування Бора-Зомерфельда:

$$-\oint \frac{XdP}{f(P)} = 2\pi \hbar(n + \delta).$$

Правильність правила квантування перевірено на одновимірних прикладах, які мають точні розв'язки. Отримано добре узгодження результатів. На прикладах показано, що правило квантування можна застосовувати для тривимірних потенціалів з радіальною симетрією.

Отримані результати проілюстровані численними прикладами і не суперечать уже відомим теоретичними даним.

Основні результати дисертації опубліковано в таких роботах:

- [1] Tkachuk V. M., Fityo T. V. Factorization and superpotential of the PT symmetric Hamiltonian // J. Phys. A.— 2001.— V. 34, No. 41.— P. 8673–8677.
- [2] Fityo T. V. A new class of non-Hermitian Hamiltonians with real spectra // J. Phys. A.— 2002.— V. 35, No. 28.— P. 5893–5897.
- [3] Tkachuk V. M., Fityo T. V. Multidimensional quasi-exactly solvable potentials with two known eigenstates // Phys. Lett. A.— 2003. — V. 309, Iss. 5–6.— P. 351–356.
- [4] Fityo T. V., Tkachuk V. M. Time-dependent Schrödinger equation with one known solution // J. Phys. Stud (Lviv). — 2005.— V. 9, No. 4.— P. 299–303.
- [5] Fityo T. V., Vakarchuk I. O., Tkachuk V. M. One dimensional Coulomb-like problem in deformed space with minimal length // J. Phys. A.— 2006.— V. 39, No. 9.— P. 2143–

2149.

- [6] *Fityo T. V., Vakarchuk I. O., Tkachuk V. M.* WKB approximation in deformed space with minimal length // *J. Phys. A.*— 2006.— V. 39, No. 2.— P. 379–387.
- [7] *Фітьо Т.* Деформована алгебра Гайзенберга з верхнім обмеженням імпульсу // Всеукраїнська конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики Еврика–2003, Львів, 21–23 травня 2003р.: збірник тез. Львів.— 2003.— С. 157.
- [8] *Фітьо Т. В.* Побудова багатовимірних квазіточно розв'язуваних потенціалів з двома відомими власними функціями // Конференція молодих учених і аспірантів ІЕФ–2003, Ужгород, 10–12 вересня 2003р.: програма і тези доповідей.— Ужгород.— 2003.— С. 70.
- [9] *Фітьо Т.* Новий клас неермітових операторів з дійсним спектром // Міжнародна конференція студентів і молодих вчених з теоретичної та експериментальної фізики Еврика–2005, Львів, 24–26 травня 2005р.: збірник тез.— Львів.— 2005.— С. 30–31.
- [10] *Fityo T., Tkachuk V., Vakarchuk I.* 1D Coulomb problem with deformed Heisenberg algebra // Sixth International Conference: Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics, Kyiv, June 20–26, 2005: <http://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2005/Fityo.html>.

Анотація

Фітьо Т. В. Нові точно та квазі-точно розв'язувані квантові системи. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 — теоретична фізика, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2006.

Дисертацію присвячено дослідженню та побудові квантових задач з кількома чи всіма відомими розв'язками. Так інверсний метод було застосовано до побудови квазі-точно розв'язуваних систем, які описуються багатовимірним стаціонарним рівнянням Шрьодінгера з двома відомими рівнями чи одновимірним нестаціонарним з одним відомим розв'язком. Значну увагу було приділено новим напрямом квантової механіки, зокрема квантовій механіці з неермітовими гамільтоніанами та квантовій механіці з деформованими алгебрами Гайзенберга, які приводять до виникнення мінімальної довжини. Нами знайдено загальний вираз суперпотенціалу PT -симетричного гамільтоніану, що дало змогу його факторизувати і, як наслідок, отримати широкий клас квазі-точно розв'язуваних PT -симетричних гамільтоніанів з одним відомим рівнем. Побудовано новий клас квазі-точно розв'язуваних неермітових гамільтоніанів з дійсним спектром. Нами було точно розв'язано одновимірну кулонівську задачу в деформованому просторі з мінімальною довжиною. На її прикладі показано, що наявність мінімальної довжини небов'язково усуває сингулярність. Розвинуто квазі-класичне наближення та

проаналізовано його застосовність для випадку деформованого простору з мінімальною довжиною; знайдено узагальнення формули квантування Бора-Зоммерфельда. Всі отримані результати проілюстровані кількома прикладами.

Ключові слова: квазі-точно розв'язувані задачі, неермітові системи, PT -симетрія, інверсний метод, деформовані алгебри Гейзенберга з мінімальною довжиною, квазі-класичне наближення.

Аннотація

Фитьо Т. В. Новые точно и квази-точно решаемые квантовые системы.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика, Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2006.

Диссертация посвящена исследованию и построению квантовых задач с несколькими или всеми известными решениями. Так, инверсный метод был применен к построению квази-точно решаемых систем, описываемых многомерным стационарным уравнением Шредингера с двумя известными уровнями и одномерным нестационарным с одним известным решением. Значительное внимание уделялось новым направлениям квантовой механики, в частности квантовой механике с неэрмитовыми гамильтонианами и квантовой механике с деформированными алгебрами Гейзенберга, приводящих к появлению минимальной длины. Найдено общее выражение суперпотенциала PT -симметрического гамильтониана, что сделало возможным его факторизацию и вследствие этого получить широкий класс квази-точно решаемых PT -симметрических гамильтонианов с одним известным уровнем. Построено новый класс квази-точно решаемых неэрмитовых гамильтонианов с действительным спектром. Точно решена одномерная задача Кулона в деформированом пространстве с минимальной длиной. На ее примере показано, что наличие минимальной длины необязательно убирает сингулярность. Развито квази-классическое приближение и проанализирована его применимость для случая деформированного пространства с минимальной длиной; найдено обобщение формулы квантования Бора-Зоммерфельда. Все полученные результаты проиллюстрированы несколькими примерами.

Ключевые слова: квази-точно решаемые задачи, неэрмитовые системы, PT -симметрия, инверсный метод, деформированные алгебры Гейзенберга с минимальной длиной, квази-классическое приближение.

Abstract

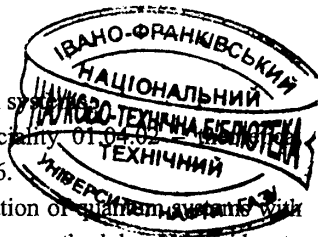
T. V. Fityo. New exactly and quasi-exactly solvable quantum systems. A thesis for a Candidate of Sciences degree on the specialty 01.04.02 physics, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2006.

The thesis is devoted to the construction and consideration of several or all known solutions. The application of inverse method by Ushveridze to construction of multidimensional stationary Schrödinger equation with two known levels and to one dimensional non stationary Schrödinger equation with one known solution is developed. Several relevant examples to illustrate the applicance of the method is given and analyzed. One of them is very interesting and reproduces quantum Kapitza effect.

But the special attention is paid to new branches of quantum mechanics. They are quantum systems with non Hermitian Hamiltonians and quantum mechanics with deformed canonical commutation relation leading to minimal length existence.

In the first case using supersymmetric approach a general form of superpotential of PT -symmetric one dimensional Hamiltonian is found. It gives a possibility to factorize the Hamiltonian and as a result to find one its level. So a wide class of quasi exactly solvable PT -symmetric Hamiltonians is constructed. Several examples of such Hamiltonians are given. We also construct with the help of pseudo-Hermitian approach proposed by Mostafazadeh a new class of non Hermitian Hamiltonians with real spectra. Constructed Hamiltonians are characterized by real parameter α . If it is negative then the spectrum of corresponding Hamiltonian does not contain complex eigenvalues but may be real. If $\alpha = 0$ then the spectrum is completely real and one eigenfunction is known. Otherwise the spectrum contains one complex eigenvalue. Thus obtained Hamiltonians are quasi exactly solvable with one known level. Several examples of all three cases are given.

We carefully analyze minimal length appearance mechanism in quantum space with Kempf's deformed commutation relation. We also proposed two new deformed algebras with interesting property of upper bound of kinetic energy operator value. For one of such an algebra a spectrum of Rosen-Morse Hamiltonian is found and analyzed. In the frame of Kempf's deformation we find spectrum of one dimensional Coulomb-like problem. As a quantization condition a condition of Hermiticity of Hamiltonian over the set of its eigenfunction is chose. We obtain a family of spectra characterizing by real parameter. Existence of this family is interpreted as a singular nature of the $-1/X$ potential. Thus existence of minimal length does not remove singularity completely. We also developed a semi-classical approximation to a wide class of one-dimensional deformed algebras and analyzed ranges of its applicability. On the basis of this analysis we derive Bohr-



Sommerfeld quantization rule and test it on several previously exactly or approximately solved problems. Application of Bohr-Sommerfeld quantization rule shows a good agreement with these results. We also show that Bohr-Sommerfeld quantization rule gives good results if applied to three dimensional problems with radial symmetry.

Key words: quasi exactly solvable problems, non Hermitian systems, PT -symmetry, inverse method, deformed Heisenberg algebras with minimal length, semiclassical approximation.