

РОЗРОБЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ РЕЖИМІВ РОБОТИ МАГІСТРАЛЬНИХ НАФТОПРОВОДІВ

Д.Ф. Тимків, Ю.Г. Мельниченко, А.В. Андрусак

ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15,
e-mail: public@nuing.edu.ua

Основна частина діючих нафтопроводів експлуатується понад 40 років. За такої тривалій період часу в металі труб під впливом напруг, корозійного середовища (в т.ч. водню) відбулися процеси, що призвели до зміни фізико-механічних властивостей металу. Ступінь зміни властивостей при цьому залежить не тільки від тривалості, але і від силових умов експлуатації, тобто від рівня робочого тиску і амплітуди його коливань. В даній роботі розглянуто систему рівнянь, за допомогою якої можна оптимізувати нестационарні режими перекачування нафти, що призводять до втрат міцності магістральних труб виникнення аварійного стану і пов'язаних з ним економічних та екологічних збитків

Ключові слова: тиск, нестационарні режими

Большая часть действующих нефтепроводов эксплуатируется свыше 40 лет. За столь длительный период времени в металле труб под воздействием напряжений, коррозионной среды (в т.ч. водорода) протекали процессы, приведшие к изменению физико-механических свойств металла. Степень изменения свойств при этом зависела не только от длительности, но и от силовых условий эксплуатации, то есть от уровня рабочего давления и амплитуды его колебаний. В данной работе рассматривается система уравнений, с помощью которой можно оптимизировать нестационарные режимы перекачки нефти, приводящие к потерям прочности магистральных труб, возникновением аварийных ситуаций и связанных с ними экономических и экологических убытков.

Ключевые слова: давление, нестационарные режимы

The main part of conventional oil pipelines has been operated for more than 40 years. Over such a continuous period of time under the influence of strain, corrosive media (including hydrogen) the processes resulted in changes of metal physical and mechanical properties have taken place in the pipeline metal. However the rate of property changes depends not only on the duration but also on the stress conditions of maintenance, i.e. on the degree of operation pressure and its ranges variety. This research deals with the system of equations with the help of which we can optimize all pumping temporary conditions which cause losses of the main pipelines strength, emergency situation appearance and connected with them economical and environmental losses.

Keywords: pressure, non-stationary modes

Нестационарний рух ідеальної рідини описується системою рівнянь, які виражають закон збереження маси, кількості руху та енергії одиничного об'єму середовища, яке рухається [1]. Векторна форма цих рівнянь має вигляд:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0; \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{\sigma}_i}{\partial x_i}; \quad (2)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) = \rho \vec{F} \vec{v} + \frac{\partial (\vec{\sigma}_i \vec{v})}{\partial x_i} + \rho q_B, \quad (3)$$

де: ρ - густина рідини; \vec{v} - вектор швидкості руху частинок рідини в заданій точці потоку; t - час; \vec{F} - вектор питомої рівнодійної всіх масових сил, які діють на об'єм рідини; $\vec{\sigma}_i$ - вектор напружень у точці потоку; u - питома внутрішня енергія частинки потоку; q_B - питома кількість тепла, отримана одиницею об'єму рідини від зовнішнього джерела.

Розглянемо рух нафти на прямолінійній ділянці магістрального нафтопроводу. Введемо прямокутну систему координат так, щоб вісь

OX була спрямована вздовж осі трубопроводу, а вісь OZ – у напрямку, протилежному вектору дії сили тяжіння.

Застосовуючи загальноприйнятий підхід для моделювання гідродинамічних процесів на ділянках магістральних трубопроводів, розглядаємо рівняння руху рідини в одновимірній постановці. Для спрощення надалі позначатимемо v_x через v .

Тоді система рівнянь (1)-(3) матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = -\rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{4}{3} \frac{\partial p}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial \left[\rho \left(e + \frac{\rho v^2}{2} \right) \right]}{\partial t} + v \frac{\partial \left[\rho \left(e + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{v}{\rho} \right) \right]}{\partial x} = \rho q_R + \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] - \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \rho v f_x; \end{cases} \quad (4)$$

Вираз у першому рівнянні системи (4), що характеризує вплив сили тертя на параметри потоку нафти, замінимо наслідком із формули Дарсі-Вейсбаха, записаної для нафти [1,3], згідно з якою

$$\frac{4}{3} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \rho v \frac{\xi v}{2D}, \quad (5)$$

де ξ - коефіцієнт гідравлічного опору.

Враховуючи факт, що об'єктом досліджень є ізотермічні нафтопроводи, правомірно застосувати гіпотезу про ізотермічність потоку нафти [1,2].

Масові сили, що діють на потік газу вздовж напрямку його руху, представлені проекцією на вісь OX сили тяжіння

$$f_x = g \frac{dz}{dx}, \quad (6)$$

де: g - прискорення вільного падіння; z - висотні положення точок на трубопроводі.

Після врахування наведених припущень система рівнянь (4) набуде вигляду

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \frac{\lambda\rho}{8\delta} \omega^2 + \rho g \frac{dz}{dx}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial x} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (8)$$

де c – швидкість звуку в даному середовищі
За умови

$$M = \rho v \frac{\pi D^2}{4}, \quad (9)$$

де M – масова витрата нафти в нафтопроводі, рівняння (7) і (8) матимуть такий вигляд

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -v \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\xi |v|}{2D} M - \rho \frac{\pi D^2}{4} g \frac{dz}{dx}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\pi D^2} \frac{1}{c^2} \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (11)$$

Розв'язавши систему рівнянь (10)-(11), можна отримати розподіл тиску та масової витрати нафти для ділянки магістрального нафтопроводу в просторі та часі. Оскільки дана система диференціальних рівнянь нелінійна, аналітичний розв'язок для неї побудувати неможливо. Тому в науці і на практиці користуються наближеними методами розв'язування цих рівнянь. Здійснимо перехід від системи рівнянь (10)-(11) до її наближеного вигляду шляхом припущення щодо квазілінійності даної системи [4].

Серед широкого набору числових методів розв'язання лінійних диференціальних рівнянь загальноприйнятим є метод мереж [5]. Для запису різницевого аналогу рівнянь (10)-(11) застосуємо неявну схему розбиття з другим порядком точності за x . Оскільки за t у системі рівнянь маємо тільки першу похідну, то для забезпечення другого порядку точності апроксимації за τ необхідно застосувати метод “предиктор-коректор” [6].

У разі використання методу мереж для визначення значень параметрів нафтопроводу під час перебігу у ньому різко виражених нестационарних процесів (якими є аварійні режими) для уникнення нестійкості різних схем необхідно виконувати локальне згущення мереж дискретизації областей визначення параметрів. Різницевої дискретизації з нерівномірною мережею розбиття підлягають рівняння (10)-(11).

Як свідчать дослідження, в разі виникнення різко виражених нестационарних процесів у трубопроводі малозначущі складові рівняння (2.15) викликають осциляцію результатів числового моделювання процесу масопередачі. Це призводить до нестійкості схеми, тому в момент виникнення збурення доцільно виключити їх із системи рівнянь.

Враховуючи наведені зауваження, різницева схема рівнянь руху нафти для точок, розмішених всередині області дискретизації за x і t матиме вигляд

$$\frac{M(x_i, t_{j+1}) - M(x_i, t_j)}{\Delta t_j} = -v(x_i, t_{j+1}) \times \frac{M(x_{i+1}, t_{j+1}) - M(x_{i-1}, t_{j+1})}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} - \frac{\pi D^2}{4} \times \quad (12)$$

$$\times \frac{p(x_{i+1}, t_j) - p(x_{i-1}, t_j)}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} - \frac{\xi |v(x_i, t_{j+1})|}{2D} M(x_i, t_{j+1}) - g \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{2} \rho \left[\frac{(z_i - z_{i-1})}{\Delta x_{i-1}} + \frac{(z_{i+1} - z_i)}{\Delta x_i} \right];$$

$$\frac{p(x_i, t_{j+1}) - p(x_i, t_j)}{\Delta t_j} =$$

$$= -\frac{4}{\pi D^2 c^2} \frac{M(x_{i+1}, t_{j+1}) - M(x_{i-1}, t_{j+1})}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)}. \quad (13)$$

Наведені рівняння розв'язуються методом послідовних наближень. На кожному наближенні коефіцієнти біля шуканих величин згідно припущення про квазілінійність системи (10)-(11) приймаються сталими і в процесі переходу до наступного наближення корегуються.

Систему алгебраїчних рівнянь (12)-(13) розв'яжемо методом прогонки [7]. Для прямого ходу прогонки необхідно звести дану систему рівнянь до рівняння з однією змінною. Вибір змінної залежить від наявних граничних умов. Розглянемо послідовно всі можливі варіанти граничних умов.

Найбільшого прикладного значення для експлуатаційних режимів магістральних нафтопроводів набула конфігурація граничних умов [1,2]: $p(0, t); M(l, t)$, де l - довжина ділянки нафтопроводу. Враховуючи те, що граничні умови подані для обох змінних, вибір змінної для зведення системи рівнянь (12)-(13) до одного рівняння може бути довільним.

Продиференціюємо праву і ліву частини рівняння (13) за x і подамо отримане диференціальне рівняння у вигляді різницевого аналогу

$$\frac{p(x_{i+1}, t_{j+1}) - p(x_{i+1}, t_j) - p(x_{i-1}, t_{j+1}) + p(x_{i-1}, t_j)}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) \Delta t} =$$

$$= -\frac{4}{\pi D^2 c^2} \left(\frac{\Delta x_{i-1} M(x_{i+1}, t_{j+1})}{\Delta x_{i-1}^2 \Delta x_i} - \right.$$

$$\left. \frac{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) M(x_i, t_{j+1}) + \Delta x_i M(x_{i-1}, t_{j+1})}{\Delta x_{i-1}^2 \Delta x_i} \right) \quad (14)$$

Підставивши рівняння (14) у (12), отримаємо систему n рівнянь із n невідомими $M(x_i, t_{j+1})$ для точок розбиття ділянки магістрального нафтопроводу

$$-\frac{(M(x_i, t_{j+1}) - M(x_i, t_j))}{\Delta t_j} -$$

$$-v \frac{(M(x_{i+1}, t_{j+1}) - M(x_{i-1}, t_{j+1}))}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} +$$

$$+ \frac{\Delta t}{c^2} \left(\frac{\Delta x_{i-1} M(x_{i+1}, t_{j+1})}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}^2} - \right.$$

$$\left. \frac{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) M(x_i, t_{j+1}) + \Delta x_i M(x_{i-1}, t_{j+1})}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}^2} \right) -$$

$$-\frac{\pi D^2}{4} \frac{p(x_{i+1}, t_j) - p(x_{i-1}, t_j)}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} - \frac{|v| \xi}{2D} M(x_i, t_{j+1}) -$$

$$- \rho \frac{1}{2} \left(\frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} + \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x_i} \right) = 0. \quad (15)$$

Провівши заміну, отримаємо:

$$-B_{1i} M(x_{i+1}, t_{j+1}) + B_{2i} M(x_i, t_{j+1}) -$$

$$-B_{3i} M(x_{i-1}, t_{j+1}) = B_{4i}, \quad (16)$$

де:

$$B_{1i} = \frac{v}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} - \frac{\Delta t}{\Delta x_i \Delta x_{i-1} c^2};$$

$$B_{2i} = -\frac{1}{\Delta t} - \frac{\Delta t (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}{c^2 \Delta x_i \Delta x_{i-1}^2} - \frac{|v| \xi}{2D};$$

$$B_{3i} = -\frac{v}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} - \frac{\Delta t}{\Delta x_{i-1}^2 c^2};$$

$$B_{4i} = -\frac{M(x_i, t_j)}{\Delta t} + \frac{\pi D^2}{4} \frac{p(x_{i+1}, t_j) - p(x_{i-1}, t_j)}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} +$$

$$+ \rho \frac{1}{2} \left(\frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} + \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x_i} \right); i = 1 \dots n.$$

Пряма прогонка здійснюється шляхом перетворення системи рівнянь (16) у систему рівнянь виду

$$M(x_{i+1}, t_{j+1}) - E_{i+1} \cdot M(x_i, t_{j+1}) = F_{i+1}, \quad (17)$$

$$\text{де } i = 1 \dots n$$

Для визначення E_n і F_n використовуються граничні умови. Оскільки $M(x_n, t_{j+1})$ задається в умові задачі як гранична умова, то, з огляду на вигляд системи рівнянь (17), для виключення впливу на значення $M(x_n, t_{j+1})$ інших граничних умов ($p(0, t), T(0, t), T_{cm}(0, t)$) необхідно, щоб виконувались умови

$$E_{i+1} = E_n = 0; F_{i+1} = F_n = M(x_{i+1}, t_{k+1}). \quad (18)$$

Таким чином, маючи значення коефіцієнтів системи рівнянь (17), для визначення розподілу масової витрати по довжині в момент часу t_{j+1} необхідно мати значення M хоча б в одній точці ділянки нафтопроводу крім останньої (в силу (18)). Для визначення $M(0, t)$ необхідно розв'язати рівняння (13), записане для початкової точки ділянки ($x = x_1$)

$$-\frac{4}{\pi D^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{M(x_2, t_{j+1}) - M(x_1, t_{j+1})}{\Delta x_1} =$$

$$= \frac{p(x_1, t_{j+1}) - p(x_1, t_j)}{\Delta t_j} \quad (19)$$

Обчисливши значення $M(x_0, t_{j+1})$, здійснюємо обернений хід прогонки, тобто підставляємо значення $M(x_0, t_{j+1})$ у систему рівнянь (17) і визначаємо розподіл масової витрати по довжині ділянки нафтопроводу в момент часу $t = t_{j+1}$. Користуючись рівняннями (13), визначаємо величини $p(x_i, t_{j+1})$, де $i = 1 \dots n - 1$.

$$p(x_i, t_{j+1}) = p(x_i, t_j) -$$

$$- \Delta t_j \frac{4}{\pi D^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{M(x_{i+1}, t_{j+1}) - M(x_{i-1}, t_{j+1})}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)}; \quad (20)$$

Для точки $i=n$ ці залежності запишуться в такому вигляді

$$p(x_i, t_{j+1}) = p(x_i, t_j) -$$

$$- \Delta t_j \frac{4}{\pi D^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{M(x_i, t_{j+1}) - M(x_{i-1}, t_{j+1})}{\Delta x_{i-1}}. \quad (21)$$

У формулах (20)-(21) для визначення розподілу параметрів потоку в момент часу t_{j+1} користуються значеннями параметрів у момент часу t_j , де $j = 0 \dots m$. Для $j=0$ розподіл параметрів $p(x_i, t_j), M(x_i, t_j)$ називають початковими умовами. Залежно від умови задачі початкові умови можуть бути задані до моменту часу t_0 або обчислені з припущенням, що у момент часу t_0 вздовж усієї ділянки газопроводу відбувається стаціонарний процес транспортування газу.

Розглянемо задачу визначення розподілу параметрів газового потоку для граничних умов $M(0, t), M(l, t)$.

Розрахунок параметрів потоку здійснюється за тією ж послідовністю, як і для граничних умов $p(0, t), M(l, t)$, але з однією особливістю. Оскільки в початковій точці маємо граничну умову Діріхле для масової витрати, необхідність розв'язування рівняння (2.33) відпадає. Тож для здійснення оберненого ходу прогонки використовуємо співвідношення

$$M(x_1, t_{j+1}) = M(0, t). \quad (22)$$

Дещо інші залежності використовуються для розв'язування задачі з граничними умовами виду $M(0, t), p(l, t)$. У цьому випадку під час прямої прогонки система рівнянь (17) замінюється рівняннями виду

$$M(x_i, t_{j+1}) = E_i M(x_{i+1}, t_{j+1}) + F_i; \quad (23)$$

$$M(x_{i-1}, t_{j+1}) = E_{i-1} M(x_i, t_{j+1}) + F_{i-1}. \quad (24)$$

Тоді для E_i і F_i отримаємо такі залежності.

$$E_i = \frac{B_{1i}}{B_{2i} - B_{3i} \cdot E_{i+1}}; \quad F_i = \frac{B_{4i} + B_{3i} F_{i+1}}{B_{2i} - B_{3i} E_{i+1}}. \quad (25)$$

Оскільки маємо граничну умову Діріхле на початку газопроводу, то за аналогією з (18)

$$E_i = 0; \quad F_i = M(0, t). \quad (26)$$

Таким чином, за формулами (25) визначаються значення E_i і F_i , де $i = 1 \dots n$.

Наприкінці ділянки газопроводу маємо умову Неймана, тому запишемо рівняння (13) для точки x_n

$$\begin{aligned} & - \frac{4}{\pi D^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{M(x_{n+1}, t_{j+1}) - M(x_{n-1}, t_{j+1})}{(\Delta x_{n-1} + \Delta x_n)} = \\ & = \frac{p(x_n, t_{j+1}) - p(x_n, t_j)}{\Delta t_j}, \end{aligned} \quad (27)$$

де $M(x_{n+1}, t_{j+1})$ - значення масової витрати в уявній точці x_{n+1} .

Із системи рівнянь (23)-(24) для $i = n$ і (27) визначаємо значення $M(x_{n+1}, t_{j+1})$ і здійснюємо обернений хід прогонки, тобто визначаємо розподіл масової витрати по довжині ділянки газопроводу в момент часу $t = t_{j+1}$.

Якщо граничні умови мають вигляд $p(0, t), p(l, t)$, тобто на обох кінцях маємо умови Неймана для $M(x, t)$, то розв'язати систему рівнянь (17) із другим порядком точності апроксимації за x неможливо.

Тому для рівняння, до якого зводимо систему рівнянь (12)-(13), як змінну величину приймаємо $p(x, t)$. Для цього продиференціюємо рівняння (10) за x і запишемо отримане рівняння у вигляді різницевого аналога

$$\begin{aligned} & \frac{M(x_{i+1}, t_{j+1}) - M(x_{i+1}, t_j) - M(x_{i-1}, t_{j+1}) + M(x_{i-1}, t_j)}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) \Delta t} = \\ & = -v \cdot \left(\frac{\Delta x_{i-1} M(x_{i+1}, t_{j+1})}{\Delta x_{i-1}^2 \Delta x_i} - \right. \\ & \left. - \frac{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) M(x_i, t_{j+1}) + \Delta x_i M(x_{i-1}, t_{j+1})}{\Delta x_{i-1}^2 \Delta x_i} \right) - \\ & - \frac{\pi D^2}{4} \cdot \left(\frac{\Delta x_{i-1} P(x_{i+1}, t_{j+1})}{\Delta x_{i-1}^2 \Delta x_i} - \right. \\ & \left. - \frac{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) P(x_i, t_{j+1}) + \Delta x_i P(x_{i-1}, t_{j+1})}{\Delta x_{i-1}^2 \Delta x_i} \right) + \\ & + \frac{\xi |v|}{2D} \frac{M(x_{i+1}, t_{j+1}) - M(x_{i-1}, t_{j+1})}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}. \end{aligned} \quad (28)$$

Виразимо з (13) різницевий аналог першої похідної масової витрати за x , підставимо в (28) і, провівши заміни, отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} & - B_{1i} P(x_{i+1}, t_{j+1}) + B_{2i} P(x_i, t_{j+1}) - \\ & - B_{3i} P(x_{i-1}, t_{j+1}) = B_{4i}, \end{aligned} \quad (29)$$

де:

$$B_{1i} = \frac{\pi D^2}{4 \Delta x^2}; \quad B_{2i} = \frac{\pi D^2 c^2}{4 \Delta t^2} + \frac{2 \pi D^2}{4 \Delta x^2};$$

$$B_{3i} = \frac{\pi D^2}{4 \Delta x^2};$$

$$\begin{aligned} B_{4i} = & \frac{\pi D^2 c^2}{4 \Delta t^2} P(x_i, t_j) - \frac{M(x_{i+1}, t_j) - M(x_{i-1}, t_j)}{2 \Delta x \Delta t} + \\ & + w \frac{M(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2M(x_i, t_{j+1}) + M(x_{i-1}, t_{j+1})}{\Delta x^2} - \\ & - \frac{|v| \xi}{2D} \frac{M(x_{i+1}, t_{j+1}) - M(x_{i-1}, t_{j+1})}{2 \Delta x}. \end{aligned}$$

Здійснюючи пряму прогонку, отримаємо рівняння

$$p(x_{i+1}, t_{j+1}) = E_{i+1} \cdot p(x_i, t_{j+1}) + F_{i+1}, \quad (30)$$

де $i = 1 \dots n$. При цьому використовуємо умову Діріхле для $p(x, t)$

$$E_n = 0; \quad F_n = p(x_n, t_{j+1}). \quad (31)$$

Для оберненого ходу прогонки використовується інша гранична умова Діріхле, а саме:

$$p(x_1, t_{j+1}) = p(0, t). \quad (32)$$

Для визначення розподілу масової витрати з рівняння (13) підставимо першу похідну масової витрати за x у рівняння (12) і виразимо з останнього масову витрату в i -тому вузлі

Висновок

Розглянута система рівнянь, що описує рух нафти магістральним нафтопроводом, дасть змогу оптимізувати нестационарні режими перекачування, що є причиною втрат міцності магістральних труб, що може призвести і до аварійного їх стану. Крім того, отримано розрахункові залежності для визначення розподілу масової витрати і тиску нафти у нестационарному режимі роботи нафтопроводів. За допомогою цих параметрів визначають параметри міцності, а також термін довговічності нафтопроводів.

Література

- 1 Дейч М.Е. Техническая газодинамика / М.Е. Дейч; изд. 2-е перераб. – М-Л: Госэнергоиздат, 1961. – 670 с.
- 2 Рождественский Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Наука, – 1968. – 687 с.
- 3 Селезнев В.Е. Основы численного моделирования магистральных трубопроводов; под ред. В.Е. Селезнева / В.Е.Селезнев, В.В.Алешин, С.Н. Прялов. – М.: КомКнига, 2005. – 496 с.
- 4 Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. - М.: Наука, – 1978. – 513 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії
18.02.11
Рекомендована до друку професором
Грудзом В.Я.*

$$M(x_i, t_{j+1}) = \left[\frac{v\pi D^2}{4} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{p(x_i, t_{j+1}) - p(x_i, t_j)}{\Delta t} - \frac{\pi D^2}{4} \frac{p(x_{i+1}, t_{j+1}) - p(x_{i-1}, t_{j+1})}{2\Delta x} + \frac{M(x_i, t_j)}{\Delta t} - g \frac{\pi D^2}{4} \rho \frac{1}{2} \left[\frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta x} + \frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta x} \right] \right] \times \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{|v|\xi}{2D} \right)^{-1} \quad (33)$$

Рівняння (33) для визначення масової витрати в першій точці матиме вигляд

$$M(x_1, t_{j+1}) = \left[\frac{v\pi D^2 c^2}{4} \frac{p(x_1, t_{j+1}) - p(x_1, t_j)}{\Delta t} - \frac{\pi D^2}{4} \frac{p(x_2, t_{j+1}) - p(x_0, t_{j+1})}{2\Delta x} + \frac{M(x_1, t_j)}{\Delta t} - g \frac{\pi D^2}{4} \rho \frac{1}{2} \left[\frac{z_1 - z_0}{\Delta x} + \frac{z_2 - z_1}{\Delta x} \right] \right] / \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{|v|\xi}{2D} \right), \quad (34)$$

де $p(0, t), \rho(0, t)$ - значення відповідно тиску та густини газу в уявній точці.